Ole Witt-Hansen LMFK Marts 2008

---

* Tværsnittene på tegningen er misvisende.

∘ $dm = \rho\, dV = \rho \underbrace{2\pi R \sin\theta}_{\text{Omkreds af strimmel}} \underbrace{R\, d\theta}_{\text{Bredde af strimmel}} \underbrace{dR}_{\text{Tykkelse af kugleskal}}$.

$dF = G\mu r^{-2} dm$. F er kraften fra hele denne kugleskal.

dF_z er komponent langs z-aksen: $dF_z = dF \cos\varphi$

P.gr. af symmetri går de andre komponenter ud.

~~Jeg indfører $r = \sqrt{R^2 + z^2}$~~

$$r^2 = (z - R\cos\theta)^2 + R^2 \sin^2\theta$$
$$= z^2 - 2zR\cos\theta + \underbrace{R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta}_{R^2 \cdot 1}$$
$$r^2 = R^2 - z^2 - 2zR\cos\theta$$

$$\cos\varphi = \frac{z - R\cos\theta}{r}.$$

Så indsættes:

$$dF_z = -2\pi G\mu\rho R^2 dR \sin\theta\, d\theta\, r^{-3}(z - R\cos\theta)$$

Vi integrerer kun for denne kugleskal, så alle konstanterne er:

$$K = -2\pi G\mu\rho R^2 dR.$$

$dF_z = K \cdot I$, hvor $I = \int_0^{\pi} r^{-3} \sin\theta (z - R\cos\theta)\, d\theta$

Integration by parts
or ~~Par~~ Partial integration, se Urban m.fl. Math HL
(er det ikke den I bruger?) p. 715 ff.

Actually it is combined with integration by substitution (p. 661) (+p. 713).

$$r = (R^2 + z^2 - 2zR\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$r^{-1} = (R^2 + z^2 - 2zR\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}$$

$$* \; d(r^{-1}) = -\tfrac{1}{2}(R^2 + z^2 - 2zR\cos\theta)^{-\frac{3}{2}} \times 2zR(+\sin\theta)\,d\theta$$

$$= -zR\, r^{-3} \sin\theta\, d\theta$$

* Og: $d(r^{-1}) = -r^{-2}dr$
$\Rightarrow \; dr = zR\,r^{-1}\sin\theta\,d\theta$

$$I = \int_0^{\pi} r^{-3}\sin\theta\,(z - R\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{-1}{zR}\int_{\theta=0}^{\pi}(z - R\cos\theta)\,d(r^{-1}) = \frac{-1}{zR} \times I_2$$

Int. by parts $\quad I_2 = \left[r^{-1}(z - R\cos\theta)\right]_0^{\pi} - \int_{\theta=0}^{\pi} r^{-1}\,d(z - R\cos\theta)$

$$= \quad \text{—''—} \quad - \quad I_3$$

$$I_3 = \int_{\theta=0}^{\pi} r^{-1}\,d(z - R\cos\theta) = \int_{\theta=0}^{\pi} r^{-1}R\sin\theta\,d\theta$$

Fra * fås: $I_3 = \frac{1}{z}\int_{\theta=0}^{\pi} dr$, $= \frac{1}{z}\left[r\right]_{\theta=0}^{\pi}$

Fejl hos Witt-Hansen i det grå p. 33
4. linje: Sidste exponent skal være $+\frac{1}{2}$.

$$I_2 = \left[r^{-1}(z - R\cos\theta)\right]_{\theta=0}^{\pi} - \frac{1}{z}\left[r\right]_{\theta=0}^{\pi}$$

$$= (R+z)^{-1}(z+R) - |R-z|^{-1}(z-R) - \frac{1}{z}\left(|R+z| - |R-z|\right)$$

OBS! Hvis $z > R$ er $|z-R| = |R-z| = z-R$.

$$I_2 = \frac{z+R}{z+R} - \frac{z-R}{z-R} - \frac{1}{z}\left(R+z-z+R\right) = \underline{-\frac{1}{z} \times 2R}$$

Så sætter vi sammen (og håber på fortegn er korrekte)

$$F_z = \overbrace{-2\pi G\mu\rho R^2 dR}^{K} \times (-1)\frac{1}{zR} \times (-1)\frac{1}{z} \times 2R$$

$$= -4\pi G\mu\rho R^2 dR \times \frac{1}{z^2} = -G\frac{dM\,\mu}{z^2}.$$

idet hele kugleskallen har rumfanget:

$4\pi R^2 dR$ (overflade × tykkelse).

Til sidst integreres over alle kugleskaller:
(integration v. substitution)

og $\int dM = \rho\int_0^R 4\pi R^2 dR = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 = \rho V_{kugle} = M$.

Hvis $z < R$ gælder $|z-R| = |R-z| = R-z$

og $I_2 = 1 + 1 - \frac{1}{z}\left(R+z-R+z\right) = 2 - 2 = \underline{\underline{0}}$.