Tal og uendelige mængder

af Torsten Krause Meyer

Kapitel	Side	Indhold
	3	Introduktion
1	4	Hilbert's Hotel. *I hvilket vi som appetitvækker præsenterer, hvordan et hotels reception konfronteres med aspekter af en bestemt type uendelighed, og i hvilket vi til sidst antyder en anden type uendelighed.*
2	9	De naturlige tal, uendelige mængder. *I hvilket vi bliver præsenteret for den mest fundamentale uendelige mængde bestående af tal og kommer ind på udvalgte aspekter ved begrebet 'mængde'.*
3	12	Primtal. *I hvilket vi som eksempel på en uendelig ægte delmængde af de naturlige tal ser på primtallene samt bliver præsenteret for det indirekte bevis.*
4	14	Mængder med samme "mægtighed". *I hvilket vi bliver præsenteret for en metode til at sammenligne 'størrelsen' af visse uendelige mængder ved hjælp af begrebet 'mægtighed'.*
5	17	Nummerable mængder. *I hvilket vi vil se eksempler på mængder som er lige mægtige med de naturlige tal og som derfor kan nummereres.*
6	19	Mængden af de hele tal er nummerabel. *I hvilket vi udvider vores tal-perspektiv til at se på alle de hele tal.*
7	21	De rationelle tal. *I hvilket vi laver endnu en udvidelse af talbegrebet til det talområde de fleste af os er tilfredse med i vores hverdag, hele tal, brøker og endelige decimalbrøker.*
8	23	Mængden af de rationelle tal er nummerabel. *I hvilket vi viser at de rationelle tal - trods deres uendelige tæthed - kan nummereres.*
9	25	De irrationelle tal. *I hvilket vi - ligesom oldtidens grækere - nødtvungent må indse at der findes tal som ikke er rationelle.*
10	28	De reelle tal. *I hvilket vi ser på foreningsmængden af de rationelle og de irrationelle tal og undrer os over, at der virkelig kan være plads til de irrationelle tal på tallinjen, samt berører hvordan reelle tal kan beregnes og defineres.*

11	31	Er de reelle tal nummerable? *I hvilket vi undersøger om den sidste udvidelse af talbegrebet til de reelle tal, ligesom de rationelle tal, kan nummereres.*
12	34	Kardinaltallet for en uendelig mængde. *I hvilket vi indfører et mål for en uendelig mængdes mægtighed.*
13	36	Større eller mindre transfinite kardinaltal. *I hvilket vi ved definitioner gør det muligt at sammenligne kardinaltallene for to uendelige mængder som ikke er lige mægtige, samt præsenterer Cantor-Schröder-Bernstein teoremet.*
14	40	Kardinaltallet for **R.** *I hvilket vi præsenteres for et transfinit kardinaltal som ikke er identisk med kardinaltallet for de naturlige tal og andre nummerable mængder.*
15	41	Potensmængden - mængden af alle delmængder. *I hvilket vi i jagten på flere transfinite kardinaltal bliver præsenteret for en mængde hvis elementer selv er mængder, nemlig alle delmængderne for en given mængde.*
16	45	Sammenligning af kardinaltallene **|P(N)| og** $\aleph$. *I hvilket vi viser at der er en sammenhæng mellem kardinaltallet for potensmængden for de naturlige tal og kardinaltallet for de reelle tal.*
17	47	Potensmængden for en vilkårlig mængde, Cantor's teorem. *I hvilket vi generaliserer og ser på ikke-nummerable mængders potensmængde, samt beviser Cantor's teorem om kardinaltallet for en sådan.*
18	51	Egenskaber for uendelige mængder og kardinaltal *I hvilket vi ser på udvalgte konsekvenser af teorien for uendelige mængder og deres kardinaltal.*
19	59	Udviklingen af matematik på grundlag af aksiomer *I hvilket vi kommer ind på udviklingen indenfor matematikken og omtaler den voksende interesse i at se på grundlaget for matematik og den aksiomatiske opbygning.*
20	65	Paradokser, Zermelo-Fraenkel aksioms-systemet. *I hvilket vi præsenterer nogle af de paradokser matematikerne har kæmpet med og omtaler et "moderne" aksioms-system.*
21	70	Matematiske "skoler" og matematikkens ufuldstændighed. *I hvilket vi kommer ind på, at matematikere ikke altid er enige, og vi afslutter med en overraskende erkendelse af matematikkens ufuldstændighed.*
Separat fil		Appendices og litteratur

Tal og uendelige mængder

Introduktion.

Dette skrift er et forsøg på at give en ekspres-indføring i dele af den matematiske disciplin som kaldes 'aksiomatisk mængde-teori' ('axiomatic set theory', på dansk også 'aksiomatisk mængdelære').
Skriftets kapitler har en jævnt stigende sværhedsgrad, og da jeg må indrømme at min målgruppe er temmelig udefineret, kan jeg ikke forudsige hvornår en af mine eventuelle læsere synes at "nu kan det være nok"! For at tilfredsstille endnu mere matematisk nysgerrige har jeg lavet en række appendices som supplerer hovedteksten med uddybende argumenter.
Hovedteksten er desuden suppleret med henvisninger som kan springes over uden at miste den røde tråd.

Ofte henviser jeg til artikler i en.wikipedia.org - den engelske udgave af encykolædien Wikipedia. Se lidt mere omtale om brugen af Wikipedia i Litteratur til sidst i Appendices.

Endelig er der undertiden illustrerende eksempler samt spørgsmål til læseren som kan give mere forståelse. Man kan dog godt undlade at besvare spørgsmålene og stadigvæk få udbytte af den videre tekst.

Det må indrømmes, at skriftet nok bærer præg af, at skrivningen undervejs har ført til at jeg selv har forstået mere og mere, samt at mere forståelse også fører til stigende erkendelse af alt det jeg ikke ved (eller ikke har forstået).
Jeg håber dog at denne "egen-pædagogik" netop sikrer læserens fornøjelse og udbytte af teksten.

Kort om indholdet af skriftet:
I matematik er der ikke blot een slags uendelighed. Begrebet 'uendelig' har flere forskellige aspekter. Specielt kan mængder med uendelig mange elementer være "mere eller mindre uendelige". Hvad der mere præcist menes med dette, beskrives i det følgende, og beskrivelsen har tæt forbindelse med en præsentation af de trinvise udvidelser af talbegrebet fra de hele positive tal op til de reelle tal og videre til de 'transfinite kardinaltal'.
I de sidste kapitler omtales matematikkens historiske udvikling og forsøgene på at opbygge matematikken aksiomatisk, samt lidt om matematikkens "ufuldstændighed".

For at komme ind på emnet præsenteres først "Hilbert's Hotel".

Kapitel 1. Hilbert's Hotel.

I hvilket vi som appetitvækker præsenterer, hvordan et hotels reception konfronteres med aspekter af en bestemt type uendelighed, og i hvilket vi til sidst antyder en anden type uendelighed.

David Hilbert, tysk matematiker, 1862-1943. Hilbert introducerede ideen om Hilbert's Hotel i 1924, og den blev populariseret af fysikeren George Gamow i 1947.

Hilbert's Hotel er stort. Det har nemlig uendelig mange værelser, og værelsernes numre er 1, 2, 3, ... (hvor prikkerne '...' betyder at talrækken fortsætter i det uendelige). Hotellet er en sen eftermiddag helt fyldt op med gæster, intet værelse er ledigt. Men om aftenen ankommer endnu en gæst som gerne vil have et værelse. Bliver denne nye gæst afvist? Nej, receptionen klarer det sådan her:

Hver af hotellets nuværende gæster bliver bedt om at flytte til et værelse med et nummer som er 1 større end gæstens nuværende værelses-nummer. Altså gæsten i værelse nr. 1 flytter til værelse nr. 2, gæsten i værelse nr. 2 flytter til værelse nr. 3, og generelt: gæsten i værelse nr. n flytter til værelse nr. n+1. Dernæst flytter den nye gæst ind i det nu ledige værelse nr. 1. Så er den klaret.

Kollage: David Hilbert og det meget store hotel. Tegningen findes flere steder på web. Oprindelig kilde er ukendt.

En time senere ankommer en bus med 30 nye gæster. Også de vil gerne bo på Hilbert's Hotel. Hvad gør receptionen? Hver af hotellets nuværende gæster bliver bedt om at flytte til et værelse med et nummer som er 30 større end gæstens nuværende værelse. Gæsten i værelse 1 flytter til værelse 31, gæsten i værelse 2 flytter til værelse 32, gæsten i værelse n flytter til værelse n+30. De 30 nye gæster flytter ind i de nu ledige værelser med numre fra 1 til 30.

Lidt senere på aftenen bliver det værre. Der ankommer en bus med uendelig mange nye gæster. Kan receptionen også klare dette?
Jo, de beder hver af hotellets nuværende gæster om at flytte til et værelse med et nummer som er dobbelt så stort som gæstens nuværende værelse. Gæsten i værelse nr. 1 flytter til værelse 2, gæsten i værelse 2 flytter til værelse 4, gæsten i værelse nr. n flytter til værelse nr. 2n. Så får alle de eksisterende gæster et værelse med et lige nummer. De uendelig mange nye gæster bliver bedt om at flytte ind i de nu ledige værelser med ulige numre. F.eks. bliver passageren som sidder i bussen på plads nr. 1 bedt om at flytte ind i værelse 1, passageren på bus-plads 2 flytter ind i værelse 3, passageren på plads nr. m flytter til værelse nr. 2m-1.

Check at denne formel dur med flere eksempler. Hvilket værelse får f.eks. passageren som sidder på plads nr. 17? Hvilken passager får værelse nr. 49?

Senere bliver det endnu værre. Der kommer 29 busser, hver med uendelig mange passagerer. Også det klarer den effektive reception. Men hvordan?
Hver af de nuværende gæster bliver bedt om at flytte til et værelse med et nummer som er 30 gange det nuværende nummer. Gæsten i værelse 1 flytter til værelse 30, gæsten i værelse 2 flytter til værelse 60, gæsten i værelse n flytter til værelse 30n. På den måde får alle de nuværende gæster værelser med numre som ved division med 30 giver resten 0.
Dernæst bliver passageren i bus nr. 1 på plads m bedt om at flytte ind i værelse 30(m-1) +1. F.eks. får passagererne i bus 1 på pladserne 1, 2 og 3 værelserne nr. 1, 31 og 61 - alle numre som ved heltals-division med 30 giver resten 1.
Tilsvarende får passageren på plads m i bus nr. b (hvor $1 \leqq b \leqq 29$) værelset med nr. v = 30(m-1)+b, tal som ved division med 30 giver resten b.
F.eks. får passagererne i bus nr. b=2 på pladserne m=1, 2 og 3 værelserne 2, 32 og 62, numre som ved division med 30 giver resten 2, etc.

Hvilket værelse får passageren i bus nr. b=17 på plads m=11?

Alle passagerer får på denne måde et værelse. Men kan vi være sikre på at der ikke er to passagerer der får tildelt det samme værelse?
Svaret er ja. Det svarer til at ligningen v = 30(m-1)+b med et givet v og med b og m som ubekendte, netop har én løsning hvor v, b og m er hele positive tal og $1 \leqq b \leqq 29$.

Hvilken passager (bus b, plads m) får tildelt værelse v=1222?
Hvorfor har dette problem kun én løsning?

Få evt. et tip ved at se på de følgende spørgsmål.
Hvordan skal formlen se ud hvis der kommer 44 busser?
Hvilket værelse får i det tilfælde en passager som sidder på plads 11 i bus 40?
Alle passagererne i bus 40 får værelser hvis numre ved heltals-division med et bestemt tal giver en bestemt rest. Hvilket tal divideres med og hvilken rest skal det give?
Hvilke værelser får de nuværende gæster?
Brug princippet om heltals-division og rest til at argumentere for at formlen kun har én løsning for et givet v og med b og m som ubekendte.

Hvis der kommer x antal busser bliver formlen:

$$\text{Værelse nr. } v = (x+1)(m-1) + b$$

hvor x er antal busser, b er bussens nummer, m er gæstens plads i bussen.

Check formlen med tal-eksempler, f.eks. med tal fra de foregående eksempler.
Check at formlen også kan bruges til at finde de nuværende gæsters værelsenummer i tilfældet med 29 busser ved at tildele dem et bus-nr.
b = 30 og som m benytte deres oprindelige værelse-nummer.
Tilsvarende i tilfældet med 44 busser, hvilken værdi skal b så have?
Hvordan bliver formlen hvis der kun kommer 1 bus, og er det den samme formel som vi tidligere brugte i netop det tilfælde?

Ved midnat går det helt amok. Der ankommer uendelig mange busser med hver uendelig mange passagerer. Receptionisterne river sig i håret og tænker, det her er da ikke muligt. Men så er der en af dem som tegner et diagram:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1/1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
2/1 & 2/2 & 2/3 & 2/4 & 2/5 & 2/6 & 2/7 & 2/8 & \cdots \\
\nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
3/1 & 3/2 & 3/3 & 3/4 & 3/5 & 3/6 & 3/7 & 3/8 & \cdots \\
\nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
4/1 & 4/2 & 4/3 & 4/4 & 4/5 & 4/6 & 4/7 & 4/8 & \cdots \\
\nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
5/1 & 5/2 & 5/3 & 5/4 & 5/5 & 5/6 & 5/7 & 5/8 & \cdots \\
\nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
6/1 & 6/2 & 6/3 & 6/4 & 6/5 & 6/6 & 6/7 & 6/8 & \cdots \\
\nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
7/1 & 7/2 & 7/3 & 7/4 & 7/5 & 7/6 & 7/7 & 7/8 & \cdots \\
\nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
8/1 & 8/2 & 8/3 & 8/4 & 8/5 & 8/6 & 8/7 & 8/8 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

I diagrammet betyder tallet før '/' bus nr. og tallet efter '/' plads nr. (symbolet '/' står *ikke* for division her!). F.eks. '2/3' betyder bus nr. b=2, plads nr. m=3.
Pilene angiver den rute i diagrammet der skal benyttes for at tildele løbende værelse-numre.
Systemet er, at man går igennem hver diagonal skråt opad.
Når en diagonal er færdig starter man på en ny diagonal fra nederst til venstre.
Nummereringen af værelser, 1, 2, 3, 4, 5 ..., forløber så således:

1/1 - 2/1 - 1/2 - 3/1 - 2/2 - 1/3 - 4/1 - 3/2 - ...

I dette system kan vi tildele de nyligt ankomne busser numre fra 2 og frem og så hyre en bus nr. 1 som vi må bede de oprindelige gæster på hotellet lige flytte over i, inden vi begynder at tildele værelser til alle.

Det er også muligt at lave en formel til denne værelse-tildeling:

$$\text{værelse nr. } v = \tfrac{1}{2}(b+m-2)(b+m-1) + m$$

Hvilket værelse for passageren i bus 4 på plads 5 tildelt? Sammenlign resultatet ved at tælle langs ruten i diagrammet.

Det er ikke ganske indlysende hvordan denne formel er lavet, og at den sikrer at to gæster ikke får tildelt samme værelse, samt at alle værelser bliver brugt.
Formlen er er et eksempel på en såkaldt "parringsfunktion", se evt. mere om dette i appendiks 1.

Det ser indtil videre ud til at de gode receptionister på Hilbert's Hotel kan løse alle problemer med disse forskellige former for uendelige ankomster. Endda også hvis der ankommer uendelig mange færger, hver med uendelig mange busser, hver med uendelig mange passagerer, etc. Men det vil vi lade ligge.

I alle disse eksempler, kan hvert problem løses på mange forskellige måder. En løsning kan enten gives ved en formel eller ved en metode til opremsning af gæsternes værelser.
I eksemplet med endelig mange busser, hver med uendelig mange nye gæster, kunne man f.eks. lade gæsterne gå ind på hotellet i denne orden:
bus 1 gæst 1, bus 2 gæst 1, ... , sidste bus gæst 1, dernæst tilbage til bus 1 med: bus 1 gæst 2, bus 2 gæst 2, ... etc.
Bemærk at vi ikke kan opremse ved først at tage alle gæsterne i bus 1, dernæst alle gæsterne i bus 2, etc. For med uendelig mange gæster i bus 1 når vi aldrig frem til gæsterne i bus 2. Tilsvarende kan ingen af disse to former for opremsning bruges i tilfældet med uendelig mange busser. Problemet skal kunne løses sådan, at hver gæst for tildelt et værelsesnummer i et endeligt antal skridt. Det lykkes f.eks. netop ved diagrammet ovenfor.

Læseren er velkommen til at finde på alternative metoder i de forskellige tilfælde af ankomster.

Næste morgen får de service-mindede receptionister en ny udfordring.
Hilbert's Hotel har også et anneks som indeholder uendelig mange nummererede konference-rum, rum nr. 1, 2, 3 .... De uendelig mange gæster på hotellet forlanger nu, at receptionen skal reservere et konference-rum til et hvilket som helst muligt udvalg af gæster. Der skal f.eks. være et rum til alle de gæster som bebor lige værelsenumre, eller til alle dem som har værelsesnumre som er primtal, eller som har værelsenumre fra 3 til 17, eller et hvilket som helst andet udvalg bestående af endelig mange eller uendelig mange gæster, herunder også et rum til udvalg med kun én deltager, reserveret til hver enkelt gæst på hotellet, samt desuden et rum til alle gæsterne og et rum der altid skal stå helt tomt!
Receptionisterne har fået meget selvtillid, så de går igang med at udtænke hvordan de kan tildele et konferencerum med et givet nummer til hvert af alle disse mulige udvalg. Men her viser det sig at de kommer til kort. Lige meget hvilke metoder de foreslår, er der udvalg - endda uendelig mange - som ikke kan få et konference-rum med et bestemt nummer. På en eller anden måde er mængden af udvalg "mere uendelig" end udbuddet af konference-rum.

Der findes åbenbart forskellige slags uendeligheder.
Det vil blive mere forståeligt når vi nu går igang med en mere systematisk præsentation af uendelige mængder.

Kapitel 2. De naturlige tal, uendelige mængder.

I hvilket vi bliver præsenteret for den mest fundamentale uendelige mængde bestående af tal og kommer ind på udvalgte aspekter ved begrebet 'mængde'.

Vi definerer ikke her nærmere hvad en mængde er, men siger blot at en mængde består af en samling af nogle veldefinerede ting, kaldet elementer. Elementerne vil i denne sammenhæng være forskellige former for tal, men vi kan også have mængder hvis elementer selv er mængder. F.eks. kan en ret linje opfattes som en mængde af punkter, og mængden af alle rette linjer i planen er så en mængde hvis elementer, linjerne, selv er mængder (med punkter som elementer).
En mængde kan indeholde endelig mange eller uendelig mange elementer.

Lad os som eksempel på en mængde med uendelig mange elementer se på mængden af **de naturlige tal**, her symbolsk skrevet: **N**.
De naturlige tal defineres her som **de hele positive tal inklusive 0**, altså "tælle-tallene" samt 0:

N: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

hvor de tre prikker '...' viser at opremsningen fortsætter i det uendelige.
Hvis tallet 0 ikke ønskes med, betegnes mængden **N+**:

N+: 1, 2, 3, 4, 5, ...

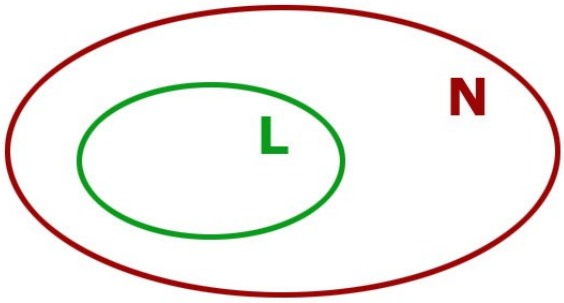
Hvad vil det sige at de naturlige tal er en uendelig mængde?
Løst sagt - og desværre cirkulært ved igen at bruge termen 'uendelig': Vi kan blive ved med at tælle i det uendelige. Eller, lidt bedre: Der findes ikke noget største naturligt tal. For hver gang vi tror vi har fundet et største, f.eks. n_{max}, kan vi finde et der er større, f.eks. $n_{max} + 1$. Eller en definition ud fra modsætningen: En uendelig mængde er en mængde som ikke indeholder endelig mange elementer. Vi vender senere tilbage til flere karakteristika ved uendelige mængders uendelighed.

Lad os se på nogle mængder som består af udvalgte elementer af **N**.
Vi starter med at se på mængden af de lige tal (inklusive 0):

L: 0, 2, 4, 6, 8, 10, ...

L er en **delmængde** af **N**. Det betyder at ethvert element i **L** også tilhører **N**.

Symbolsk skrives det således: **L** ⊆ **N**
L er desuden en **ægte delmængde** af **N**. Det betyder at ethvert element i **L** også tilhører **N**, men at der desuden findes elementer i **N** som ikke tilhører **L** (de ulige tal). Symbolsk skrives det således: **L** ⊂ **N**



'Venn diagram' af **L** som ægte delmængde af **N**, **L** ⊂ **N**
(John Venn, engelsk matematiker, logiker og filosof opfandt denne type diagram ca. 1880)

Et andet eksempel på en ægte delmængde af **N** er kvadrattallene, det vil sige de tal som kan skrives som kvadratet på et naturligt tal, f.eks.. $9 = 3 * 3 = 3^2$:

K: 0, 1, 4, 9, 16, 25, ...

Både **N**, **L** og **K** er uendelige mængder. Delmængder af **N** kan også indeholde endelig mange elementer, f.eks. alle ulige tal mellem og inklusive 7 og 17.
Man bruger i mængde-teorien ved opremsning af elementerne i en mængde at placere dem mellem krøllede paranteser, i dette tilfælde:

{7, 9, 11, 13, 15, 17}

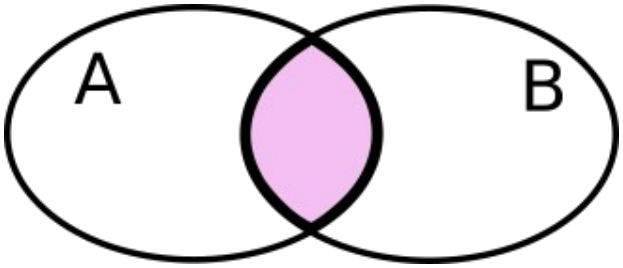
Den orden man opremser elementerne i er vilkårlig (bortset fra et eventuelt ønske om systematik). F.eks. er:

{7, 9, 11, 13, 15, 17} = {11, 17, 9, 13, 15, 7}

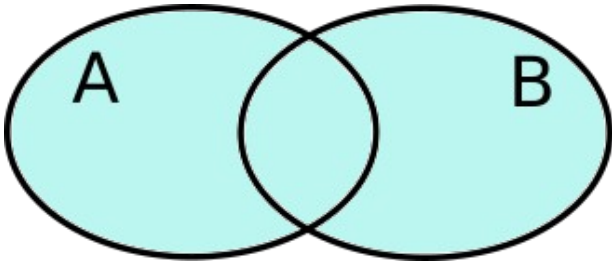
Tilsvarende kan vi f.eks. skrive mængden af de ulige tal **U** således:

U= {1, 3, 5, 7, 9, 11, ... }

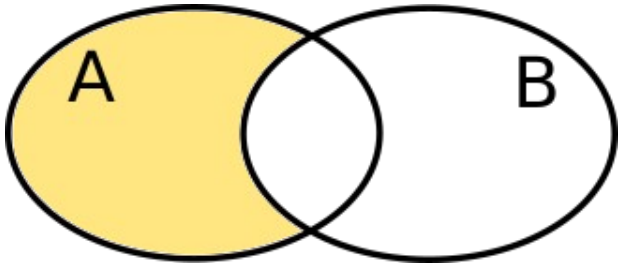
Flere mængde-begreber:
Den **tomme mængde Ø**, indeholder ikke nogen elementer.
(Symbolet for den tomme mængde er ikke et dansk 'Ø', men en cirkel med streg igennem.)



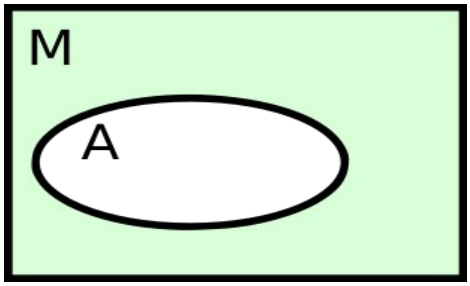
Fællesmængde A∩B
Alle de elementer som både tilhører **A** og **B**



Foreningsmængde A ∪ B
Alle de elementer som tilhører **A** eller **B** (eller begge)



Mængdedifferens A - B
Alle de elementer som tilhører **A** men ikke **B**



Mængdedifferens **M - A**
Alle de elementer som tilhører **M** men ikke **A**
Kaldes også **komplementærmængden** til **A** i forhold til "mængde-universet" **M**

Hvis fællesmængden er tom, **A∩B** = **Ø**, kaldes **A** og **B** for **disjunkte** mængder.

Eksempler:
Fællesmængden af lige tal og kvadrattal:

K∩L = {0, 4, 16, 36, 64, 100, ... }

Foreningsmængden af lige tal og kvadrattal:

K ∪ **L** = {0, 1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 26, ... }

Mængdedifferensen kvadrattal minus ulige tal er det samme som fællesmængden af kvadrattal og lige tal:

K - U = {0, 4, 16, 36, 64, 100, ... } = **K∩L**

Mængdedifferensen naturlige tal minus lige tal (komplementærmængden til de lige tal i forhold til mængde-universet **N**) er de ulige tal:

N - **L** = **U**

Kapitel 3. Primtal.

I hvilket vi som eksempel på en uendelig ægte delmængde af de naturlige tal ser på primtallene samt bliver præsenteret for det indirekte bevis.

Et primtal defineres som et helt positivt tal større end 1 som kun 1 eller tallet selv går op i ved division.
De første 15 primtal er: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 ...
De tal som ikke er primtal kaldes 'sammensatte tal'.
Ethvert sammensat tal kan skrives som produktet af primtal, og dette produkt, kaldet 'primfaktor-opløsningen', er entydigt (bortset fra faktorernes orden).
Dette kaldes 'talteoriens fundamentale teorem' eller 'aritmetikkens fundamentalsætning'.
F.eks. er $12 = 2 * 2 * 3 = 2^2 * 3$, og $120 = 2 * 2 * 2 * 3 * 5 = 2^3 * 3 * 5$.

For et givet tal n større end 2 kan vi checke om tallet er et primtal eller et sammensat tal ved at undersøge, om tallene fra 2 til n-1 går op i n.
Vi kan endda nøjes med at undersøge om primtallene fra 2 op til det største primtal som er mindre end kvadratroden af n, går op i n, og går ingen af disse tal op i n, er n et primtal.

At der findes uendelig mange primtal bevistes allerede i "Euklids elementer", skrevet ca. 300 år f.v.t. Det er ikke en selvfølge. Primtallenes tæthed i middel "tynder ud" op igennem talrækken i den forstand, at antallet af primtal fra 2 og op til et givet tal n i forhold til n aftager. Så man kunne forestille sig at de til sidst "slipper op".

Beviset for at der er uendelig mange primtal er et godt eksempel på et **indirekte bevis** ('reductio ad absurdum') og bliver gengivet her.
Vi antager det modsatte af hvad vi ønsker at bevise, nemlig at der findes et største primtal p_{max}. Dernæst forsøger vi at vise at dette fører til en modstrid.
Vi danner produktet P af alle primtal mindre end eller lig med p_{max}:

$$P = 2 * 3 * 5 * 7 * ... * p_{max}$$

P har altså som primfaktorer netop alle primtal fra 2 op til og med p_{max}.
Dernæst ser vi på tallet $Q = P + 1$.
Der er nu to muligheder, enten er Q et primtal eller Q er et sammensat tal.
Hvis Q er et primtal er vi kommet i modstrid med vores antagelse, for Q er jo større end P som igen er større end p_{max}.

Hvis Q er et sammensat tal, må det kunne skrives som produkt af primfaktorer.
Men for alle de primtal som er faktorer i P gælder, at de ved division op i
Q = P + 1 giver resten 1. Så de kan ikke være primfaktorer i Q.
Primfaktorerne i Q må derfor alle være større end p_{max}.
Men så er vi også her kommet i modstrid med vores antagelse.
Vores antagelse må derfor være falsk. Konklusionen må derfor være at der intet største primtal findes, og derfor må mængden af primtal være uendelig.
Bemærk at det indirekte bevis ikke anviser hvordan man finder et primtal større end p_{max}, blot at et sådant eksisterer.

Se evt. mere om primtal i appendiks 2.

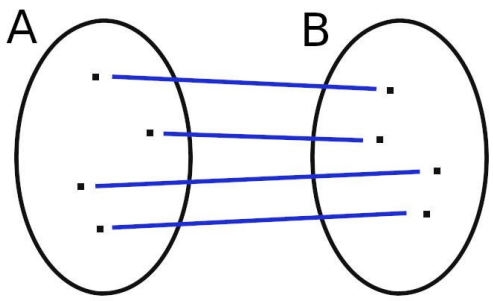
Kapitel 4. Mængder med samme "mægtighed".

I hvilket vi bliver præsenteret for en metode til at sammenligne 'størrelsen' af visse uendelige mængder ved hjælp af begrebet 'mægtighed'.

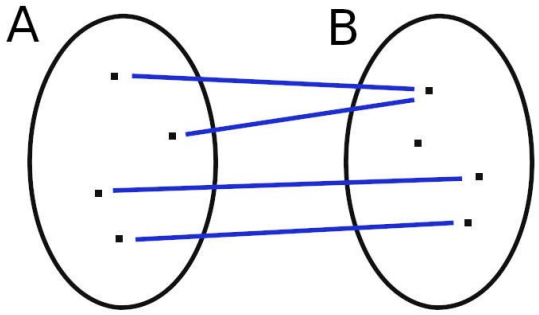
De anvendte symboler for delmængder som blev præsenteret i kapitel 2, $\subseteq$ og $\subset$, minder om "mindre end eller lig med" ($\leqq$) og "mindre end" (<) anvendt på tal. Så vi kunne fristes til at sige at f.eks. de lige tal **L** som ægte delmængde af **N** er mindre uendelig end mængden af de naturlige tal **N**. Men den fristelse vil vi modstå! Det vil vi, fordi **L** og **N** i en vis forstand er "lige talrige" eller "lige mægtige" til trods for at **L** er en ægte delmængde af **N**.

*Vi definerer at to mængder **A** og **B** er "**lige mægtige**" hvis vi kan etablere en korrespondance imellem dem sådan, at der til hvert element i **A** svarer præcist ét bestemt element i **B**, og omvendt, at der til hvert element i **B** svarer præcist ét bestemt element i **A**. En sådan korrespondance mellem **A** og **B** kaldes en "én til én korrespondance", vi skriver dette fremover: "**1-1 korrespondance**".*

Tegningerne nedenfor illustrerer definitionen.



1-1 korrespondance mellem **A** og **B**. Hvert element i **A** korresponderer med præcist ét element i **B**, og omvendt, hvert element i **B** korresponderer med præcist ét element i **A**.



Ikke 1-1 korrespondance mellem **A** og **B**. Dels er der to elementer i **A** som korresponderer med det samme element i **B**. Dels er der et element i **B** som ikke korresponderer med noget element i **A**.

Ifølge denne definition er **L** og **N** lige mægtige.
For vi kan som 1-1 korrespondance mellem **N** og **L** f.eks. vælge at der til hvert tal n i **N** svarer præcist ét tal i **L**, nemlig det dobbelte tal 2n. Til 1 i **N** svarer 2 i **L**, til 9 i **N** svarer 18 i **L**, etc. Og omvendt, til hvert tal m i **L** svarer så præcist ét tal i **N**, nemlig m/2. Til 2 i **L** svarer 1 i **N**, til 18 i **L** svarer 9 i **N**, etc.

Specielt korresponderer 0 i **N** med "sig selv", altså **0**, i **L**.

En ægte delmængde af en uendelig mængde kan altså godt være lige mægtig med mængden selv. Derimod kan en ægte delmængde af en endelig mængde ikke være lige mægtig med mængden selv.
Hvis f.eks. mængden **A** er hel-tallene fra 1 til 11, begge inklusive, og vi som ægte delmængde af **A** vælger **B** bestående af tallene 2, 4, 6, 8, 10, så kan der ikke etableres en 1-1 korrespondance mellem **A** og **B**, for de to mængder indeholder ikke lige mange elementer. En korrespondance mellem **A** og **B** vil enten efterlade elementer i **A** uden nogen korrespondance med elementer i **B**, eller flere af **A**'s elementer vil svare til det samme element i **B**. Og så kan korrespondancen ikke være 1-1.

Sammenlign med at der afholdes en sammenkomst hvor **A** er mængden af kvinder og **B** er mængden af mænd. Der skal afholdes pardans hvor hvert par består af en kvinde og en mand. Kun hvis der er lige mange kvinder og mænd til stede, kan der dannes par uden at der bliver nogen (kvinder eller mænd) til overs.

Dette kan også illustreres ved 'dueslags-princippet' ('the pigeonhole principle', også kaldet 'Dirichlet's skuffeprincip'): Hvis n duer (f.eks. 10) skal fordeles i m dueslag (f.eks. 8) hvor n er større end m, n > m, må mindst ét dueslag indeholde mere end 1 due.
Se evt. https://en.wikipedia.org/wiki/Pigeonhole_principle

I vores forsøg på at indkredse hvad vi forstår ved at en mængde er uendelig, ser det ud til at vi her måske har fundet en væsentlig egenskab:
Hvis en mængde er uendelig, er det altid muligt at finde en ægte delmængde af mængden, sådan at der kan etableres en 1-1 korrespondance mellem den ægte delmængde og mængden selv.

Dette er foreløbig en påstand. Men da vi ved at dette ikke er muligt for en endelig mængde, kan vi i alt fald fastslå det omvendte:
Hvis en mængde har den egenskab at det er muligt at finde en ægte delmængde af mængden, sådan at der kan etableres en 1-1 korrespondance mellem den ægte delmængde og mængden selv, så må mængden være uendelig.

Tilsammen ville vi så kunne påstå:
At en mængde er uendelig er ensbetydende med, at det er muligt at finde en ægte delmængde af mængden, sådan at der kan etableres en 1-1 korrespondance mellem den ægte delmængde og mængden selv.

Skrevet med symbolet for 'ensbetydende med' eller 'hvis og kun hvis', '⇔', ser påstanden således ud:

*Mængden **A** er uendelig ⇔*
*Der findes en ægte delmængde **B** af **A**, sådan at der kan etableres en 1-1 korrespondance mellem **B** og **A**.*

Bemærk at dette ikke betyder at enhver ægte delmængde af en uendelig mængde kan sættes i 1-1 korrespondance med mængden selv.
*Hvilke ægte delmængder af **N** kan f.eks. ikke sættes i 1-1 korrespondance med **N** selv?*

Vi vender tilbage til denne egenskab ved uendelige mængder i kapitel 18.

Se evt. også appendiks 3, Egenskab ved en uendelig mængde.

Kapitel 5. Nummerable mængder.

I hvilket vi vil se eksempler på mængder som er lige mægtige med de naturlige tal og som derfor kan nummereres.

Hvis vi for en uendelig mængde **A** kan etablere en 1-1 korrespondance med de naturlige tal **N**, kaldes **A** for en **nummerabel** eller tællelig mængde.

Husk at **N** også indeholder tallet 0. I nogle sammenhænge vil det være mere passende at vise at **A** er nummerabel ved at etablere en 1-1 korrespondance med **N+**, dvs. nummerere **A**'s elementer 1, 2, 3, ... Det vil være i orden, fordi vi også kan etablere en 1-1 korrespondance mellem **N** og **N+**, ved til hvert element n i **N** at lade svare elementet n+1 i **N+**.

Vi kan f.eks. "tælle" de lige tal ved at benytte den før nævnte 1-1 korrespondance. Mængden af lige tal **L** er således nummerabel.

Også f.eks. mængden af ulige tal **U** er nummerabel, for vi kan lave en 1-1 korrespondance mellem **U** og **N** ved til hvert tal n i **N** at lade svare det ulige tal $u = 2n + 1$.

Check denne formel med nogle tal-eksempler.
*Find den "omvendte" formel som viser at der til hvert tal u i **U** svarer et naturligt tal n = ?.*

Mængden af **primtal P** er nummerabel.
Vi kan ganske vist ikke her lave en formel for en 1-1 korrespondance, men vi kan nummerere eller tælle primtallene ved en opremsning, så primtallet '2' får nummer 1, '3' får nummer 2, '5' får nummer 3, '7' får nummer 4, etc. Selv om der er uendelig mange primtal, kan vi for ethvert givet primtal ved denne opremsning finde det tilsvarende nummer i et endeligt antal skridt og har således lavet en 1-1 korrespondance mellem **P** og **N+**.

*En sådan metode som kan nå frem til et entydigt resultat i et endeligt antal skridt - her at et givet primtal får et entydigt nummer - kaldes en **algoritme**. Det er ikke her afgørende at det måske tager 1 milliard år at finde nummeret!*

Generelt om delmængder af **N** kan vi sige:
Enhver veldefineret delmængde af **N** er enten endelig eller nummerabel.
Vi kan jo - ligesom ved primtallene - nummerere elementerne i den givne delmængde ved opremsning og bestemme elementets nummer i et endeligt antal skridt.

Produktmængden N x N er nummerabel.
Produktmængden **N**x**N** defineres som mængden af alle ordnede talpar (x,y) hvor x og y tilhører **N**. At talparret (x,y) er ordnet betyder at der generelt er forskel på (x,y) og (y,x). Punkterne i et 2-dimensionelt koordinatsystem med en x-akse og en y-akse kan f.eks. gives ved det ordnede talpar (x,y), også kaldet punktets koordinater.
At **N**x**N** er nummerabel kan ses ved at etablere en 1-1 korrespondance mellem **N**x**N** og **N**. Dette kan gøres ved en parringsfunktion. Vi så dette i kapitel 1 for (**N+)**x(**N+)**, og for **N**x**N** er en parringsfunktion, 'Cantor Pairing Function', omtalt i appendiks 1.
Tilsvarende kan der dannes en produktmængde **N**x**N**x**N** indeholdende ordnede tal-tripler (x,y,z), og denne er også numerabel, og så fremdeles med flere endeligt mange **N**'er.

I det følgende vil vi undersøge flere tal-mængder for om de er nummerable.

Kapitel 6. Mængden af de hele tal er nummerabel.

I hvilket vi udvider vores tal-perspektiv til at se på alle de hele tal.

Mængden af de **hele tal** betegnes **Z**, og den omfatter både de negative hele tal, de positive hele tal og 0. Altså:

Z: ... -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 ...

Opremset på denne måde er det ikke så indlysende hvordan vi kan etablere en 1-1 korrespondance mellem **Z** og **N+**, dvs. hvordan vi kan nummerere tallene i **Z**. For at vise at **Z** er nummerabel må vi anvise en metode til hvordan de hele tal kan nummereres. Selv om **Z** indeholder uendelig mange tal, må en tælle-metode føre til at et givet helt tal får sit nummer indenfor et endeligt antal skridt. Derfor kan vi ikke nummerere ved f.eks. først at starte med 0 og nummerere fremad gennem de positive tal, og derefter gå tilbage til -1 og nummerere baglæns i talrækken gennem de negative tal. For vi når aldrig at blive færdig med at nummerere de positive tal. Så f.eks. tallet -1 får ikke et nummer indenfor et endeligt antal skridt ved denne metode.

I stedet kan vi f.eks. nummerere efter dette opremsnings-system for **Z**:

Z: 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, ...

På denne måde når vi et hvilket som helst helt tal (positivt eller negativt) i et endeligt antal skridt. Vi har fundet en algoritme til bestemmelse af tallets nummer. Vi kan endda opstille en formel for den 1-1 korrespondance som følger dette system. Hvis z betegner et helt tal og n betegner det tilsvarende positive naturlige tal (det hele tals nummer) har vi:

Hvis $z = 0$	er $n = 1$.
Hvis $z > 0$	er $n = 2z$.
Hvis $z < 0$	er $n = -2z + 1$.

Dvs. at hvert positivt tal i **Z** svarer til præcis ét lige tal i **N+**, og hvert negativt tal i **Z** svarer til præcis ét ulige tal i **N+** og tallet 0 svarer til nummer 1. Desuden gælder at ethvert tal i **N+** svarer til præcis ét tal i **Z**. Vi har altså etableret en 1-1 korrespondance mellem **Z** og **N+**, dvs. **Z** er nummerabel.

Find nummeret n af nogle hele tal, f.eks. z = 2, z = -2, z = 7, z = -7, ved hjælp af formlerne og sammenlign ved at nummerere frem i opremsnings-systemet.
Vis at tilfældet z = 0 kunne være blevet inkluderet i et af de to andre tilfælde, nemlig hvilket?
Find den "omvendte" formel som med et givet nummer n finder det tilsvarende hele tal z på formen:

Hvis n er ?	*er z = ?*
Hvis n er ?	*er z = ?*

*Hvordan vil formlerne se ud hvis vi vil lave en 1-1 korrespondance mellem **Z** og **N**, dvs. vi starter med at tælle: 0, 1, 2, ... ?*

Kapitel 7. De rationelle tal.

I hvilket vi laver endnu en udvidelse af talbegrebet til det talområde de fleste af os er tilfredse med i vores hverdag, hele tal, brøker og endelige decimalbrøker.

Mængden af **de rationelle tal** betegnes **Q** og den omfatter alle tal som kan skrives som en brøk hvor både tæller og nævner er hele tal.
F.eks. 1/2; 2/3; 22/7; 8/16; -17/12; -12/18; 0 (=0/1); 18 (= 18/1)

De hele tal **Z** er en ægte delmænge af de rationelle tal:

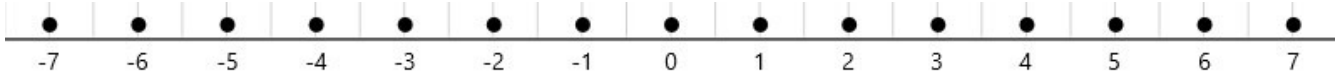
$$\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$$

Alle hele tal kan skrives som en brøk med hel tæller og nævner, f.eks. kan 18 skrives som 18/1, derfor er **Z** en delmængde af **Q**. Og der findes rationelle tal som ikke er et helt tal, f.eks. 2/3, derfor er **Z** en ægte delmængde af **Q**.
Alle rationelle tal kan skrives som en uforkortelig brøk med hel tæller og nævner, f.eks. kan 8/16 forkortes til 1/2.

Rationelle tal kan også skrives som en decimalbrøk. Det kan vises at en decimalbrøk repræsenterer et rationelt tal netop når den enten er endelig (altså endeligt mange cifre efter kommaet), eller periodisk fra en vis decimal at regne.
F.eks. er: 0,25 = 1/4; 5,**3**3333 ... = 5 1/3 = 16/3; 0,4**21**2121 ... = 139/330.
De tre prikker angiver at decimalbrøken er uendelig og gentages med den periode som er fremhævet med fede typer. I det sidste eksempel er første decimaltal 4, og derefter gentages perioden 21 i det uendelige.

Vi viser ikke dette her og heller ikke hvordan man omskriver en periodisk decimalbrøk til en brøk med hel tæller og nævner - se i appendiks 4.

De hele tal danner diskrete punkter på en tallinje:



I modsætning til de hele tal har de rationelle tal den egenskab, at der for to givne forskellige rationelle tal altid kan findes et nyt rationelt tal imellem dem. F.eks. vil middelværdien af to givne forskellige rationelle tal ligge midt imellem dem og være rationel:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=\frac{(ad+bc)}{2bd} \qquad \text{Eks.:} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}\right)=\frac{(11+10)}{220}=21/220=0{,}09545454\ldots$$

Desuden har rationelle tal den egenskab at de kan ligge vilkårligt tæt på hinanden på tallinjen.
F.eks. vil denne talfølge af rationelle tal komme så tæt på tallet 1 som vi ønsker:

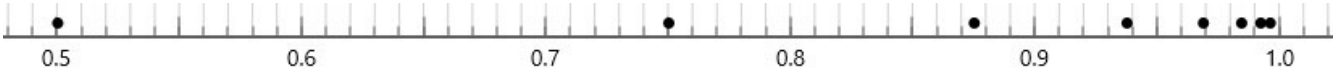
1/2, 3/4, 7/8, 15/16, 31/32 ...

Nævnerne er voksende potenser af 2, og hver tæller er 1 mindre end den tilhørende nævner. Afstandene til tallet 1 for disse tal bliver henholdsvis:

1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32 ...

For hvert nyt led i talfølgen halveres afstanden fra venstre til tallet 1 og kan gøres vilkårlig lille, vi skal blot fortsætte tilstrækkeligt langt op i talfølgen.

Her er de første 8 rationelle tal i denne talfølge afsat på tallinjen:



At vi generelt kan komme uendelig tæt på et vilkårligt rationelt tal ses nemmest ved at skrive de rationelle tal som decimalbrøker.
Lad os som eksempel se på tallet 2.
Disse endelige decimalbrøker (som jo er rationelle tal) kommer tættere og tættere på 2 fra hver sin side:

1,9; 1,99; 1,999; 1,9999; 1,99999; ...

og

2,1; 2,01; 2,001; 2,0001; 2,00001; ...

Vi kan f.eks. spørge: Hvilke rationelle tal opfylder betingelsen at ligge højst een millionteded = 0,000001 fra 2? Det gør: 1,999999 og 2,000001.
Det samme kan gøres med et vilkårligt rationelt tal. F.eks. for 9/8 = 9,125 som er en endelig decimalbrøk, vil disse tal opfylde betingelsen at ligge een millionteded fra 9/8: 9,124999 og 9,125001.

Dette er også muligt for rationelle tal som er repræsenteret ved en periodisk decimalbrøk. F.eks. for 1/7 = 0,**142857**142857... (perioden er ...142857...).
Disse tal ligger (højst) en millionteded fra 1/7:
0.142856**142857**142857... og 0.142858**142857**142857...
(perioden starter i begge tilfælde fra og med den 7. decimal).

Se mere om rationelle tal og decimalbrøker i Appendiks 4.

Kapitel 8. Mængden af de rationelle tal er nummerabel.

I hvilket vi viser at de rationelle tal - trods deres uendelige tæthed - kan nummereres.

Mon vi i de rationelle tal har fundet en mængde som ikke er lige mægtig med de naturlige tal - dvs. en mængde som ikke er nummerabel? Man skulle jo tro det, ud fra den egenskab at de rationelle tal ligger uendelig tæt på tallinjen, i modsætning til de naturlige tal og de hele tal som fordeler sig diskret på tallinjen. Svaret er dog - ret overraskende - et nej! Mængden af de rationelle tal er faktisk nummerabel.
Det kan bevises ved at angive en algoritme til at nummerere dem, altså vise at ethvert rationelt tal kan få tildelt et nummer i et endeligt antal skridt.

Som en forenkling, vil vi her se på de positive rationelle tal, betegnet **Q+**.

Diagram nedenfor viser hvordan man kan tildele hvert positivt rationelt tal et nummer:

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	⋯
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	2/8	⋯
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	3/7	3/8	⋯
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	4/7	4/8	⋯
5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	5/7	5/8	⋯
6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	6/7	6/8	⋯
7/1	7/2	7/3	7/4	7/5	7/6	7/7	7/8	⋯
8/1	8/2	8/3	8/4	8/5	8/6	8/7	8/8	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Diagrammet er hentet fra https://en.wikipedia.org/wiki/Pairing_function.
Vi benyttede tidligere, i afsnittet om Hilbert's Hotel, et lignende diagram i forbindelse med en parringsfunktion. Her betegner f.eks. '2/3' en brøk.

Hver række i diagrammet indeholder alle brøker med en bestemt heltallig tæller, og hver søjle indeholder alle brøker med en bestemt heltallig nævner. På denne måde får vi placeret alle (uendelig mange) heltallige brøker i et diagram.
Pilene viser den "tælle-rute" vi skal følge for at nummerere brøkerne.
Dog er hvert rationelt tal jo repræsenteret ved uendelig mange brøker som kan forkortes. For at lave en 1-1 korrespondance med **N+** kan vi kun tillade hvert rationelt tal at blive repræsenteret ved én brøk, og det kunne passende vedtages at være ved sin uforkortelige brøk. Derfor må vi på vej i tælle-ruten hoppe alle forkortelige brøker over. De er i diagrammet angivet med rødt.
Da ethvert rationelt tal - repræsenteret ved sin uforkortelige brøk - på denne måde kan tildeles et entydigt nummer i et endeligt antal skridt, har vi etableret en 1-1 korrespondance mellem **Q+** og **N+**.

Hvilket nummer får den uforkortelige brøk 2/3 i dette system?
Hvilket nummer får det rationelle tal 6/8?
Hvilken rationelt tal får nummer 15?

Til trods for at **Q+** er en mængde med elementer som kan ligge uendelig tæt, mens elementerne i **N+** ligger diskret på tallinjen, har vi vist at der kan etableres en 1-1 korrespondance mellem **Q+** og **N+**, dvs. **Q+** og **N+** er lige mægtige og **Q+** er nummerabel.

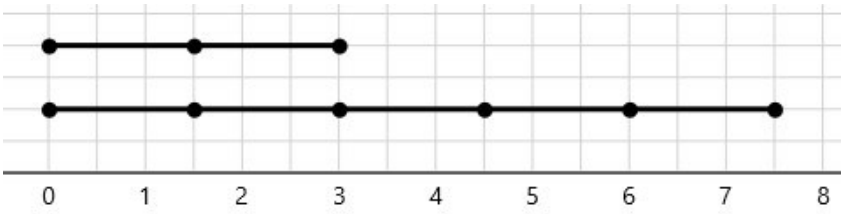
At også **Q** (med 0 og både positive og negative heltallige brøker) er nummerabel kan f.eks. vises ved en udvidelse af tælle-metoden for **Q+** på samme måde som da vi nummerede de hele tal **Z**. Så også **Q** er nummerabel.

Kapitel 9. De irrationelle tal.

I hvilket vi - ligesom oldtidens grækere - nødtvungent må indse at der findes tal som ikke er rationelle.

Findes der virkelig flere tal? Det synes som om de rationelle tal må dække alle vores behov for tal, og det er da også dem vi normalt møder i vores daglige omgang med priser, tabeller, beregninger på lommeregneren, etc., oftest i form af tal med et endeligt antal decimaler. Så det talbegreb må synes at være tilstrækkeligt. Det var netop det synspunkt oldtidens Pythagorærere havde. Med udgangspunkt i en blanding af filosofiske, religiøse og matematiske tanker (en skelnen som de - i modsætning til i dag - ikke havde) mente de at alle tal og alt i naturen kunne beskrives ved brøker med hel tæller og nævner.

Specielt ved sammenligning af linjestykkers længde betyder det, at to vilkårlige givne linjestykker altid er indbyrdes **kommensurable**, dvs. at det altid skal være muligt at finde et tilpas lille linjestykke som kan gå op i begge de to givne linjestykker. Og det betyder igen at forholdet mellem de to given linjestykkers længde må kunne skrives som en brøk med hel tæller og nævner.

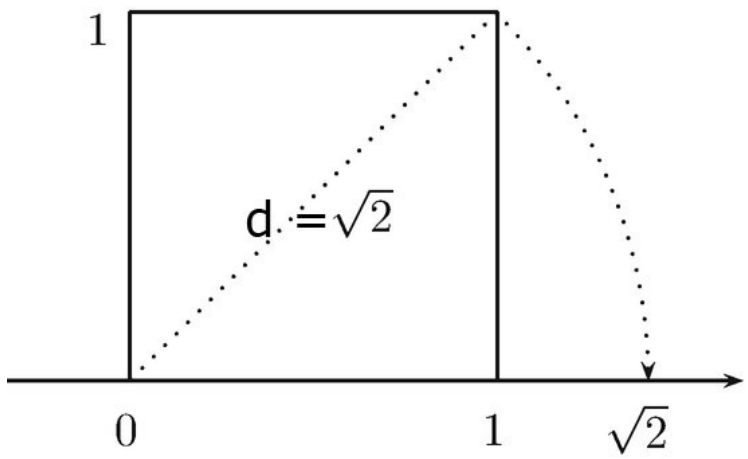


To kommensurable linjestykker, længde 3 og 7½ enheder. Et linjestykke med længden 1½ går op i begge. Forholdet imellem de to længder er et rationelt tal, 3 / 7,5 = 2 / 5.
(Målene for linjestykkerne er i vilkårlige enheder).

Efter sigende var det en af Pythagoras' egne elever som nåede frem til, at ikke alle linjestykker kunne være indbyrdes kommensurable, og at der derfor måtte findes andre tal end de rationelle tal.
Eleven tegnede et kvadrat med siden 1 samt en diagonal i kvadratet.
Derefter viste han ved en geometrisk konstruktion at diagonalen og siden i kvadratet ikke kunne være kommensurable, de var **inkommensurable**.

Hvis vi anvender Pythagoras' læresætning om retvinklede trekanter på den trekant som dannes af to af kvadratets sider og diagonalen, får vi et taludtryk for diagonalens længde d, her for et kvadrat med sidelængden 1:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad d = \sqrt{2}$$



At diagonalen er inkommensurabel med siden med længden 1 i kvadratet betyder, at diagonalens længde d er et ikke-rationelt tal, et **irrationelt tal**.
(Irrationelt tal, dvs. et 'ufornuftigt' tal som modsætning til rationelt tal, et 'fornuftigt' tal).

$\sqrt{2}$ er med andre ord irrationelt, kan ikke skrives som en brøk med hel tæller og nævner.

Pythagoras' elev argumenterede ved hjælp af en geometrisk konstruktion, men her vil vi benytte et rent algebraisk argument, dvs. ved tal repræsenteret ved bogstav-symboler.

Vi benytter et indirekte bevis for at $\sqrt{2}$ er irrationel.
Så vi antager det modsatte af hvad vi ønsker at bevise, at $\sqrt{2}$ er et rationelt tal, dvs. kan skrives som en brøk med hel tæller og nævner, henholdsvis p og q:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Vi kan yderligere tillade os at antage at brøken p/q er uforkortelig, for enhver brøk med hel tæller og nævner kan reduceres til en uforkortelig brøk.
Vi laver nu nogle algebraiske omformulinger af antagelsen:

$$\frac{p}{q}=\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p^2}{q^2}=2 \quad \Leftrightarrow \quad p^2=2q^2$$

Vi får altså at $p^2 = 2q^2$. Men når p^2 kan skrives som 2 gange et helt tal, må p^2 være et lige tal, og så må p også være et lige tal.
(Et lige tal kvadreret giver et lige tal, et ulige tal kvadreret giver et ulige tal).
Vi kan derfor skrive p som 2 gange et andet helt tal n og omformulerer videre:

$$p=2n \quad \Leftrightarrow \quad p^2=4n^2$$

Indsættes dette i det tidligere udtryk for p og q fås:

$$p^2=2q^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4n^2=2q^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2n^2=q^2$$

Men så er q^2 et lige tal, og så må q være et lige tal.

Nu er vi kommet frem til at både p og q er lige tal. Men så kan brøken p/q forkortes med 2, og dette er i modstrid med antagelsen om at p/q er en uforkortelig brøk.
Vi er kommet til en modstrid og må derfor forkaste antagelsen at $\sqrt{2}$ er et rationelt tal. Konklusion: $\sqrt{2}$ er et irrationelt tal.

Hvis det opleves utrygt at vores indirekte bevis er baseret på vores ekstra antagelse, at brøken p/q er uforkortelig, kan man i stedet ræsonnere således:
Konsekvensen af antagelsen, at $\sqrt{2}$ *kan skrives som en brøk med hele og positive tæller og nævner, er ifølge argumentationen, at denne brøk kan forkortes med 2, - og så kan den nye forkortede brøk ved samme ræsonnement igen forkortes med 2, etc. i det uendelige. Men det er ikke muligt at forkorte en brøk uendelig mange gange, da tæller og nævner ved hver forkortelse bliver mindre, og de kan ikke blive mindre i det uendelige, da de aldrig kan blive mindre end 1. Herved er vi kommet til en modstrid.*

Se evt. https://en.wikipedia.org/wiki/Commensurability_(mathematics) .

Et geometrisk bevis for at siden i et kvadrat er inkommensurabel med diagonalen kan ses i appendiks 5.

Kapitel 10. De reelle tal.

I hvilket vi ser på foreningsmængden af de rationelle og de irrationelle tal og undrer os over, at der virkelig kan være plads til de irrationelle tal på tallinjen, samt berører hvordan reelle tal kan beregnes og defineres.

Mængden af de rationelle tal og mængden af de irrationelle tal udgør tilsammen mængden af de **reelle tal** som betegnes **R**.
De reelle tal er **foreningsmængden af de rationelle og de irrationelle tal**.

Hvis vi igen tænker på tallinjen, må vi indrømme at det er svært at forestille sig at der overhovedet er plads til flere tal end de rationelle tal, for de ligger jo uendelig tæt ved hinanden. Men vi så før, at der findes linjestykker hvis længde ikke er et rationelt tal, så der må være plads til irrationelle tal mellem de rationelle tal. Som eksempel kan vi se hvordan det irrationelle tal $\sqrt{2}$ kan "klemmes inde" uendelig tæt mellem rationelle tal.

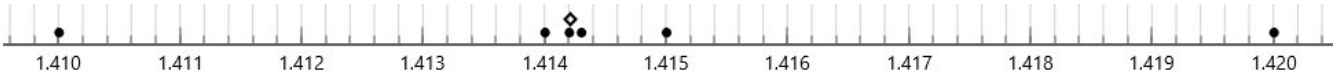
Vi ser det lettest ved at benytte decimalbrøker. De rationelle tal som skal klemme $\sqrt{2}$ inde kan repræsenteres ved de endelige decimalbrøker som er lige akkurat mindre eller større end $\sqrt{2}$. Med x et positivt rationelt tal har vi:

$$x < \sqrt{2} \Rightarrow x^2 < 2 \quad \text{og} \quad x > \sqrt{2} \Rightarrow x^2 > 2.$$

Så vi prøver os frem ved at undersøge kvadratet på de endelige decimalbrøker med stadig flere decimaler som ligger tættest muligt henholdsvis under og over 2. På den måde kan vi klemme $\sqrt{2}$ inde, og derved bestemme $\sqrt{2}$ med så mange decimaler som vi ønsker. Se beregningerne i denne tabel:

x (mindre end $\sqrt{2}$)	x^2 (mindre end 2)	x (større end $\sqrt{2}$)	x^2 (større end 2)
1	1	2	4
1,4	1,96	1,5	2,25
1,41	1,9881	1,42	2,0164
1,414	1,999396	1,415	2,002225
1,4142	1,99996164	1,4143	2,00024449
1,41421	1,9999899241	1,41422	2,0000182084
1,414213	1,999998409369	1,414214	2,000001237796
1,4142135	1,99999982358225	1,4142136	2,00000010642496

Afsættes x-værdierne på en tallinje ser det sådan ud:



$\sqrt{2}$ (markeret med ◊) bliver "klemt inde"

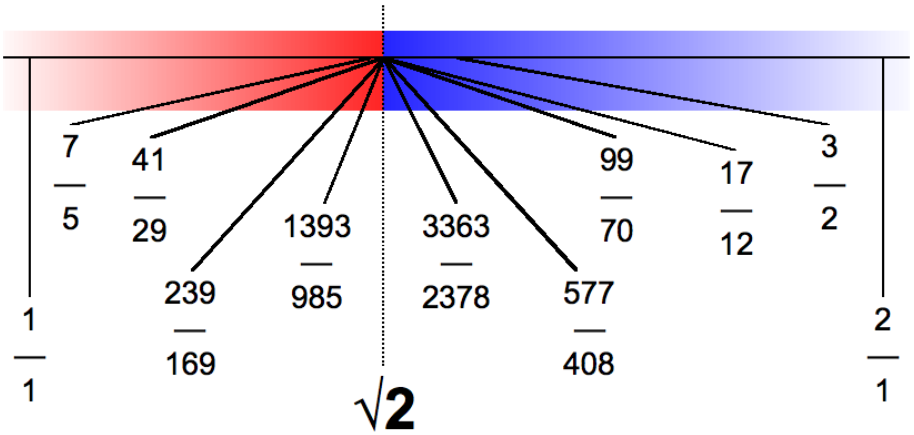
Med 5 decimaler er $\sqrt{2}$ = 1,41421, med 6 decimaler er $\sqrt{2}$ = 1,414214.

Hvis $\sqrt{2}$ skal skrives korrekt afrundet, er vi nødt til at undersøge 6 decimaler for at give $\sqrt{2}$ korrekt med 5 decimaler. Tilsvarende med f.eks. 6 decimaler ses, af tabellen at $\sqrt{2}$ må skrives som 1,414214 fordi den 7. decimal kræver at der rundes op.

Der er altså plads til et punkt svarende til det irrationelle tal $\sqrt{2}$ på tallinjen.

Hvad er det egentlig der adskiller de rationelle tal fra de reelle tal ved udvidelsen med de irrationelle tal? Som nævnt ligger de rationelle tal uendelig tæt på tallinjen. De reelle tal har samme egenskab - også her vil f.eks. middelværdien af to vilkårlige reelle tal ligge midt imellem dem. Men de reelle tal må have (mindst) een egenskab som de rationelle tal ikke har, - hvilken?

Det foregående eksempel med at indeklemme $\sqrt{2}$ giver fornemmelse af et svar. Lad os se på delmængden **D** af rationelle tal x hvis kvadrat er mindre end 2: $x^2 < 2$. Denne mængde kaldes *øvre begrænset*, fordi alle tal i mængden er mindre end visse tal. F.eks. vil alle tal x i **D** være mindre end 3, eller 2 eller 1,5. Mængden har også en *mindste øvre grænse* ved vi nu, nemlig $\sqrt{2}$, idet der ikke kan klemmes rationelle tal ind imellem $\sqrt{2}$ og de rationelle tal i **D**. Men $\sqrt{2}$ er *ikke* et rationelt tal.



Den røde markering viser mængden **D**, de rationelle tal x for hvilke $x^2 < 2$. Mindste øvre grænse for **D** er det irrationelle tal $\sqrt{2}$.
Graf hentet fra https://en.wikipedia.org/wiki/Dedekind_cut

Der findes altså delmængder af rationelle tal som er øvre begrænset, men hvis mindste øvre grænse *ikke* er et rationelt tal.
I modsætning hertil har de reelle tal følgende egenskab:

Enhver delmængde af de reelle tal som er øvre begrænset har en mindste øvre grænse som også er et reelt tal.

Denne egenskab ved de reelle tal kan danne grundlag til en af flere mulige definitioner af de reelle tal. Den mindste øvre grænse kaldes *supremum*, og metoden til definition af **R**, tæt knyttet til dette begreb, er baseret på et såkaldt 'Dedekind-snit'.

På engelsk 'Dedekind cut' efter den tyske matematiker Richard Dedekind, 1831-1916.
Den omtalte egenskab ved de reelle tal afspejler vores 'forventning' om de reelle tal. I en færdig matematisk fremstilling skal man selvfølgelig starte med en definition og derefter vise at de reelle tal så får de ønskede egenskaber.

Definitionen af de reelle tal giver grundlag for at antage det 'forventelige', at hvert punkt på tallinjen er repræsenteret ved ét reelt tal, og omvendt at ethvert reelt tal svarer til ét punkt på tallinjen. Der findes altså en 1-1 korrespondance mellem de reelle tal og punkterne på tallinjen, mængden af reelle tal og mængden af punkter på tallinjen er lige mægtige. Dette kaldes 'Cantor-Dedekind aksiomet'. De reelle tal og punkterne på tallinjen kaldes et 'kontinuum'.

I en vis forstand gælder for de rationelle tal at de "ingenting fylder" på tallinjen. Det kan vises at sandsynligheden for at ramme et rationelt tal ved at vælge et tilfældigt punkt på et givet linjestykke af tallinjen, f.eks. fra 0 til 1, er 0, mens sandsynligheden for at ramme et irrationelt tal er 1 !

"Indfangningen" af de reelle tal i en præcis definition er helt afgørende i matematikken, bl.a. i den gren som kaldes 'matematisk analyse' som omfatter funktionsbegrebet og differential- og integralregning (mål- og integral-teori).

Vi har set at $\sqrt{2}$ kan beregnes til en vilkårlig nøjagtighed i et endeligt antal skridt ved en passende algoritme. Men der findes reelle tal som er uberegnelige ('uncomputable'), dvs. for hvilke der ikke findes en algoritme til deres beregning.
Det kan vises at mængden af de beregnelige reelle tal er nummerabel. Mængden af de uberegnelige reelle tal er ikke-nummerabel, og i den forstand kan man sige at de fleste reelle tal er uberegnelige. - Hvor er talbegrebet dog underligt!
Se evt. https://en.wikipedia.org/wiki/Computable_number

Kapitel 11. Er de reelle tal nummerable?

I hvilket vi undersøger om den sidste udvidelse af talbegrebet til de reelle tal, ligesom de rationelle tal, kan nummereres.

Hvis vi antager at de reelle tal er nummerable skal det være muligt at lave en nummereret liste med en opremsning af alle reelle tal, sådan at ethvert reelt tal kan tildeles et nummer i et endeligt antal skridt. Hvilket system vi finder på i denne opremsning er ikke afgørende, antagelsen går blot på at det er muligt.

Vi tillader os her den begrænsning først kun at se på de reelle tal mellem 0 og 1, 0 og 1 ikke medregnet.
Lad os antage at vi har fundet frem til en måde at lave en opremsnings-liste over alle reelle tal mellem 0 og 1. Her ses et eksempel på en sådan liste med de første 12 tal og vist med de første 12 decimaler:

N+	**R**
1	0,**7**91349021866 ...
2	0,0**9**4619943100 ...
3	0,35**1**697256459 ...
4	0,602**8**35534896 ...
5	0,2594**6**2567026 ...
6	0,92534**5**454562 ...
7	0,113639**7**30481 ...
8	0,4800672**6**4940 ...
9	0,82868014**3**213 ...
10	0,60812798**6**14 ...
11	0,33300604570 ...
12	0,214300606452 ...
...	... ...
	0,**791865763602** ...
	0,**208134236397** ...

Starten på en liste til opremsning af alle reelle tal mellem 0 og 1. Også hvert rationelt tal mellem 0 og 1 placeres et sted på listen, de vil være repræsenteret med en periodisk decimalbrøk (fra en vis decimal) eller ved en endelig decimalbrøk (med efterstillede uendelig mange 0'er).

Er det muligt at få alle reelle tal mellem 0 og 1 med på en sådan liste?

Svaret er nej! Vi kan nemlig ud fra den givne liste konstruere et reelt tal som med garanti ikke er med. Det gøres således:
Som det ses i listen er 1. tals 1. decimal farvet rød. Tilsvarende for 2. tals 2. decimal, etc. Generelt farver vi n. tals n. decimal rød. Disse røde cifre danner en uendelig diagonal på listen.
De røde decimaler bruges nu til at danne et reelt tal, vist med rødt under listen. Dernæst laver vi et nyt reelt tal ved at erstatte hver rød decimal med en grøn decimal som er 9 minus den røde decimal. Dette nye reelle tal (som vi her kun ser de første 12 decimaler af) kan ikke være repræsenteret på vores liste. For det adskiller sig fra listens 1. tal på den 1. decimal, fra listens 2. tal på den 2. decimal, ... , fra listens n. decimal på den n. decimal, ...

Vi har altså fundet et reelt tal mellem 0 og 1 som ikke er med på vores liste, og dette strider imod vores antagelse, at listen er en opremsning af alle reelle tal. Antagelsen er derfor forkert, det er altså ikke muligt at lave en sådan opremsning af alle reelle tal mellem 0 og 1, og derfor er de reelle tal mellem 0 og 1 ikke nummerable.

Intervallet med de reelle tal mellem 0 og 1, 0 og 1 eksklusive, kaldes 'det åbne interval fra 0 til 1' og skrives]0,1[. Tilsvarende kaldes intervallet mellem 0 og 1, 0 og 1 inklusive, 'det lukkede interval' og skrives [0,1].

Det er muligt at etablere en 1-1 korrespondance mellem det åbne interval]0,1[og alle de reelle tal. Så hvis den ene mængde ikke er nummerabel, kan den anden heller ikke være det.
Et eksempel på en sådan 1-1 korrespondance kan ses i appendiks 3.

Det netop gennemførte indirekte bevis kaldes "**Cantors diagonal-argument**" efter den russisk-tyske matematiker Georg Cantor (1845-1918) som grundlagde den aksiomatiske teori for mængder og som spiller en stor rolle i dette skrift.

Man kunne her spørge: Kunne man så ikke bruge Cantors diagonal-argument også på de rationelle tal **Q**, og dermed vise at **Q** ikke er nummerabel - i modstrid med hvad vi tidligere har vist?
Vi kan godt antage at vi har opstillet en liste med alle de rationelle tal mellem 0 og 1, givet ved decimalbrøker (evt. kunne listen følge samme rækkefølge som tidligere blev benyttet i beviset for at **Q** er nummerabel). Dernæst kunne man gentage proceduren som vi benyttede for de reelle tal, dvs. markere diagonal-cifrene med rødt og erstatte hvert af dem med et grønt ciffer = 9 minus det røde ciffer. Derved fås et grønt tal som ikke kan være repræsenteret på listen. Men: det grønne tal er jo ikke nødvendigvis et rationelt tal, idet det jo ikke er sikkert at decimalbrøken er endelig eller periodisk fra en vis decimal. Så diagonal-argumentet fører ikke

til en modstrid her. - Vi kan faktisk ligefrem bruge vores viden om at **Q** er nummerabel til at slutte, at det grønne tal *ikke kan* være rationelt !

Man kunne også få den tanke, om Cantors diagonal bevis kunne bruges på de naturlige tal, **N**. Det ville unægtelige være et paradoks hvis vi kunne vise at **N** selv ikke er nummerabel! Tallene fra **N** på en sådan liste må så have uendelig mange foranstillede 0'er. Diagonalen må startes i øverste højre hjørne, altså med det første tals ener, det andets tal tier, etc. Disse nu røde tal må så konverteres til et grønt tal (f.eks. som 9 - rødt tal), og det fremkomne grønne tal må så være et tal som ikke er indeholdt i listen - altså listen kan tilsyneladende ikke indeholde alle naturlige tal. Men også her er der (heldigvis) fejl i argumentationen. For hvilken slags helt tal er det grønne tal? Det er faktisk slet ikke noget tal, for det har uendelig mange cifre. Selv om der er uendelig mange naturlige tal, så har alle tal i **N** endeligt mange cifre. Så vi har heller ingen modstrid her.

Da vi nu har set at der findes en mængde som ikke er nummerabel og altså ikke er lige mægtig med **N**, får vi brug for nærmere at definere hvad det vil sige, at en mængde er mere eller mindre mægtig end en anden mængde.

Kapitel 12. Kardinaltallet for en uendelig mængde.

I hvilket vi indfører et mål for en uendelig mængdes mægtighed.

Da vi ikke kan måle en mængdes mægtighed ved et tal i "normal forstand" hvis mængden er uendelig, vil vi indføre et nyt mål for en mængdes mægtighed:

Mægtigheden af mængden **A** betegnes **|A|** og kaldes **kardinaltallet for A**.

Symbolet **|A|** ikke at forveksle med det lignende for 'numerisk værdi'.

Vi definerer ikke her direkte hvad et kardinaltal er, men vi vil definere hvad det vil sige at et kardinaltal er lig et andet kardinaltal:

Definition:
*Hvis to mængder **A** og **B** er lige mægtige, dvs. der findes en 1-1 korrespondance imellem dem, siger vi at de to mængder har lige store kardinaltal, og vi skriver:* **|A|** = **|B|**

Da f.eks. mængden af lige tal **L** er lige mægtig med de naturlige tal **N**, kan vi skrive: **|L|** = **|N|**. Mængderne **L** og **N** har lige store kardinaltal.
Det samme gælder f.eks. for mængden af ulige tal **U** og **N**, for mængden af primtal **P** og **N**, for de hele tal **Z** og **N**, samt for de rationelle tal **Q** og **N**. I hvert af disse tilfælde har vi før vist at vi kan lave en 1-1 korrespondance imellem dem. Så vi kan skrive:

|U| = **|P|** = **|Z|** = **|Q|** = **|N|**.

Generelt kan vi sige at alle uendelige mængder som er nummerable har kardinaltallet **|N|**.

Kardinaltallet for en uendelig mængde kaldes et **transfinit kardinaltal** eller blot 'kardinaltal' hvis det er klart af konteksten, at det drejer sig om et kardinaltallet for en uendelig mængde.
For en endelig mængde vil vi simpelthen definere kardinaltallet som antallet af elementer i mængden. En mængde med 7 elementer har kardinaltallet 7. Definitionen giver mening fordi vi kan finde en 1-1 korrespondance mellem mængden med de 7 elementer og f.eks. denne delmængde med 7 elementer af **N**: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Her har vi igen en egenskab ved uendelige versus endelige mængder som måske endda kunne vendes om og bruges som definition. Vi kunne definere at

en mængde er endelig hvis den er lige mægtig med en mængde med et endelig kardinaltal, specielt en endelig delmængde af **N**.
Dernæst kunne vi definere en uendelig mængde som en mængde der ikke er endelig. Definitionen her af endelig mængde bider tilsyneladende sig selv i halen, men dette kan fastlægges mere præcist i en fremstilling af aksiomatisk mængde-teori som også indeholder en mere præcis definition af kardinaltal.

Begrebet "kardinaltal" står for det at bruge et tal som mål for antal, altså svar på spørgsmålet "hvor mange?", i modsætning til "ordinaltal" som bruges som svar på spørgsmålet "hvilket nummer?". I "der er 3 små grise" er '3' et kardinaltal; i "den 3. gris byggede et hus af mursten" bruges '3' som ordinaltal.
Kardinaltallet for en uendelig mængde kaldes som nævnt et "transfinit kardinaltal".
Tilsvarende defineres i aksiomatisk mængde-teori begrebet "transfinit ordinaltal", hvilket vi dog ikke kommer ind på her.
Definitionen af transfinite kardinaltal kan netop baseres på teorien for transfinite ordinaltal.

Vi har ovenfor set eksempler på mængder med identiske kardinaltal (de nummerable mængder). Modsat dette har vi set på tilfældet med **N** og **R** hvor vi har vist, at der ikke kan etableres en 1-1 korrespondance imellem dem. Vi får derfor brug for definitioner for hvordan forskellige kardinaltal kan sammenlignes.

Kapitel 13. Større eller mindre transfinite kardinaltal.

I hvilket vi ved definitioner gør det muligt at sammenligne kardinaltallene for to uendelige mængder som ikke er lige mægtige, samt præsenterer Cantor-Schröder-Bernstein teoremet.

Transfinite kardinaltal, kardinaltal for uendelige mængder, virker jo unægteligt som et meget abstrakt begreb uden forbindelse til vores daglige omgang med tal. Men husk at de reelle tal faktisk også er temmelig abstrakte. Vi forstår bedst de forskellige talbegreber ved deres egenskaber. En væsentlig egenskab ved tal-mængder er ordnings-begrebet, dvs. en definition af hvilke tal der er mindre eller større end andre. Symbolsk skrives orden ved hjælp af ulighedstegn, <, >, (henholdsvis 'mindre end' og 'større end') samt ≦ og ≧, (henholdsvis 'mindre end eller lig med' og 'større end eller lig med').
Vi vil nu definere en ordning for de transfinite kardinaltal.

Definition (det 'svage ulighedstegn'):
*Mængden **A** er mindre mægtig eller lige så mægtig som mængden **B**,*
*hvis der findes en 1-1 korrespondance mellem **A** og en delmængde af **B**.*
*Vi siger at kardinaltallet for **A** er "mindre end eller lig med" kardinaltallet for **B**,*
og vi skriver med ulighedstegnet ≦: **|A| ≦ |B|**

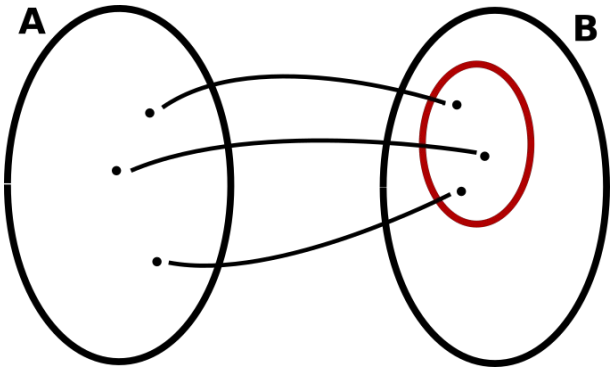


Illustration af defintionen af det "svage ulighedstegn" for kardinalttal.
*Delmængden af **B** er tegnet med en rød oval.*

Definition (det 'stærke ulighedstegn'):
*Mængden **A** er mindre mægtig end mængden **B**, hvis der findes en 1-1 korrespondance mellem **A** og en ægte delmængde af **B**, men samtidig ikke findes en 1-1 korrespondance mellem **B** og en delmængde af **A**.*
*Vi siger at kardinaltallet for **A** er mindre end kardinaltallet for **B**, og vi skriver med ulighedtegnet <:* **|A| < |B|**

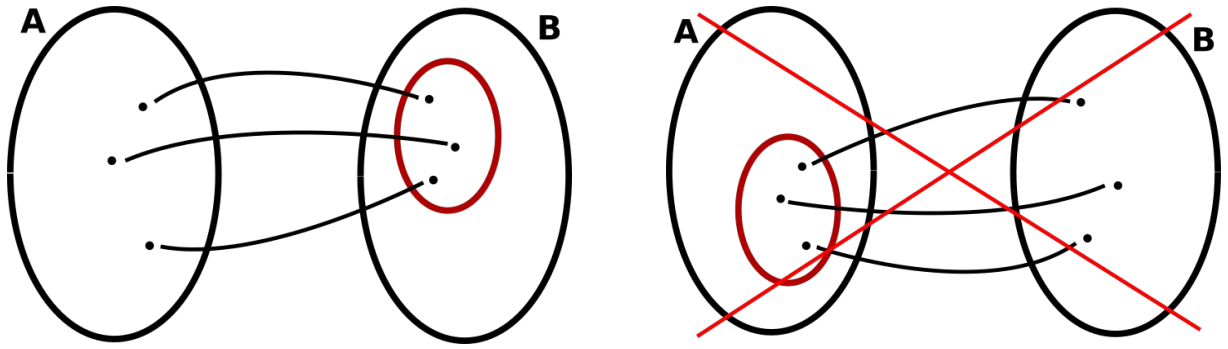


Illustration af defintionen af det "stærke ulighedstegn" for kardinalttal.

Kommentar til disse definitioner:
Hvis **A** specielt er en ægte delmængde af **B**, **A** ⊂ **B**, må der gælde **|A|** ≦ **|B|**.
For vi kan lave en 1-1 korrespondance fra mængden **A** til **A**, opfattet som delmængde af **B**, ved til hvert element i **A** at lade svare elementet selv.
Om der også gælder det stærkere **|A|** < **|B|**, afhænger af hvilke mængder vi ser på. Vi har set eksempler på ægte delmængder med samme kardinaltal som mængden selv i tilfælde med nummerable mængder, f.eks. **N** opfattet som delmængde af **Q**. Andre tilfælde har vi tilgode at se på.

Vi må her igen understrege at transfinite kardinaltal ikke er "normale tal". Når vi skal sammenligne to kardinaltal, dvs. to mængders mægtighed, må vi holde os strengt til definitionerne og ikke taget noget for givet.

For 'normale tal', naturlige, rationelle og reelle tal, p og q, kan sammenhængen mellem det svage og det stærke ulighedstegn formuleres på disse to måder:

$$p \leqq q \quad \Leftrightarrow \quad p < q \textit{ eller } p = q$$

$$p < q \quad \Leftrightarrow \quad p \leqq q \textit{ og } p \neq q$$

Dvs. ≦ betyder 'mindre end eller lig med', og < betyder 'mindre end og udelukker at p = q'. (≠: 'forskellig fra', ⇔: 'ensbetydende med').

Der gælder desuden denne regel for 'normale tal':

$$p \leqq q \quad \text{og} \quad q \leqq p \quad \Rightarrow \quad p = q$$

Lad os som eksempel sige at vi for to reelle tal p og q har vist at p ≦ q, og dernæst af en anden vej viser at der også må gælde q ≦ p, så siger reglen at vi kan slutte at der må gælde p = q.

Det er ingen selvfølge at definitionerne af ulighedstegnene for kardinaltal følger samme regler som for "normale tal". Men (heldigvis) følger det af

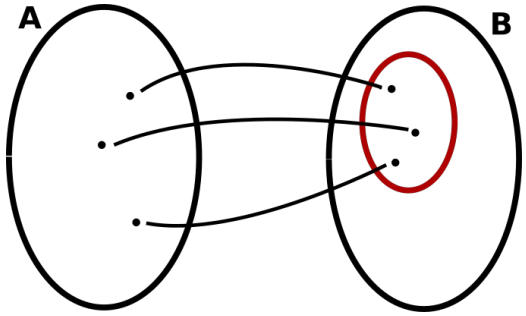
Cantor-Schröder-Bernstein teoremet (i det følgende kaldt CSB teoremet) at der for uligheder med kardinaltal netop gælder den samme regel som for reelle tal:

$$|A| \leqq |B| \quad \textit{og} \quad |B| \leqq |A| \quad \Rightarrow \quad |A| = |B|$$

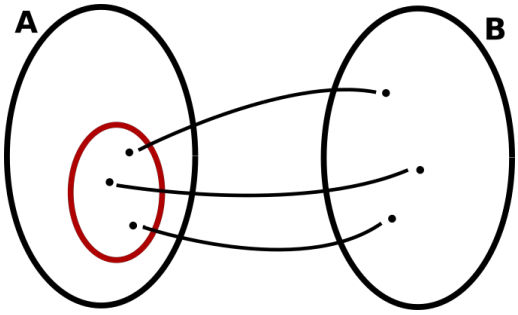
og tilsvarende at der også for kardinaltal gælder, at $\leqq$ betyder "mindre end eller lig med", og < betyder "mindre end og udelukker lighed".
Formuleret i ord ud fra vores definitioner siger CSB teoremet:

*Hvis der for to mængder **A** og **B** gælder, at der findes en 1-1 korrespondance mellem **A** og en ægte delmængde af **B**, samt at der også findes en 1-1 korrespondance mellem **B** og en ægte delmængde af **A**, så gælder at der kan findes en 1-1 korrespondance mellem hele **A** og hele **B**, dvs. de to mængder **A** og **B** er lige mægtige.*

Betingelserne i CSB-teoremet illustreret:



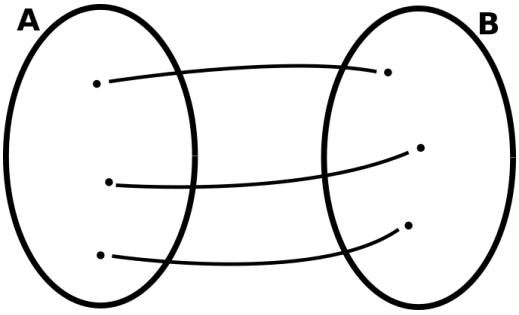
Der findes en 1-1 korrespondance fra **A** til en ægte delmængde af **B**



Der findes en 1-1 korrespondance fra **B** til en ægte delmængde af **A**

Konsekvensen ifølge CSB-teoremet illustreret:

Der findes en 1-1 korrespondance mellem hele **A** og hele **B**



Hvis 'ægte' fjernes fra betingelserne, gælder CSB-teoremet trivielt.

CSB teoremet vil blive anvendt flere gange i det følgende, men det bevises ikke her.
Se evt. mere i det ret omfattende appendiks 6 (A-D) hvor CSB-teoremet præsenteres, bevises og illustreres ved et eksempel.

Vi kan også formulere det at **A** er mindre mægtig end **B** som at **B** er mere mægtig end **A**, og vi kan skrive:

$$|A| < |B| \quad \Leftrightarrow \quad |B| > |A| \qquad \text{og:} \qquad |A| \leqq |B| \quad \Leftrightarrow \quad |B| \geqq |A|$$

Desuden kan nævnes at ordningen for kardinaltal, ligesom for de reelle tal, er **transitiv**, i betydningen:

$$|A| \leqq |B| \ \text{ og } \ |B| \leqq |C| \ \Rightarrow \ |A| \leqq |C|$$

og tilsvarende med '<', samt f.eks. blandingen:

$$|A| \leqq |B| \ \text{ og } \ |B| < |C| \ \Rightarrow \ |A| < |C|$$

Dette kan bevise ud fra definitionerne for $\leqq$ og <.

Vi vender senere tilbage til andre egenskaber ved ordningen for kardinaltal.

Kapitel 14. Kardinaltallet for **R**.

I hvilket vi præsenteres for et transfinit kardinaltal som ikke er identisk med kardinaltallet for de naturlige tal og andre nummerable mængder.

Lad os bruge definitionen af det stærke ulighedstegn til at sammenligne kardinaltallene for de naturlige tal og de reelle tal, **|N|** og **|R|**. Vi vil vise at:

$$|R| > |N|$$

altså - med det stærke ulighedstegn - at kardinaltallet for **R** er større end kardinaltallet for **N**, dvs. at **R** er mere mægtig end **N**.

For det første er det muligt at finde en 1-1 korrespondance mellem **N** og en ægte delmængde af **R**. Som ægte delmængde af **R** kan vi simpelthen vælge **N** selv, og som 1-1 korrespondance benytte at hvert naturligt tal svarer til sig selv.

For det andet er det ikke muligt at finde en 1-1 korrespondance mellem **R** og en (ægte) delmængde af **N**. For hvis den fandtes ville betingelserne for CSB-teoremet være opfyldt, og så ville **R** være lige mægtig med **N**, dvs. **R** ville være nummerabel, hvilket vi netop har vist i det foregående ikke er tilfældet.

Dette sidste kunne vi dog også have argumenteret for uden brug af CSB teoremet, idet ægte delmængder af **N** er endelige eller nummerable, og dette opfylder **R** ikke.

Vi har med andre ord nu to transfinite kardinaltal, idet vi med **|R|** har fundet et kardinaltal som er større end **|N|**.

Som symbol for disse to kardinaltal benyttes det første bogstav i det hebraiske alfabet (matematikere er altid i nød for tegn):

$|N| = \aleph_0$ ("aleph nul"). $|R| = \aleph$ ("aleph").

Og da vi har vist at **|R|** > **|N|**, også formuleret som **|N|** < **|R|** kan vi skrive:

$$\aleph_0 < \aleph$$

Findes der flere kardinalttal? Det undersøger vi i det følgende.

Kapitel 15. Potensmængden - mængden af alle delmængder.

I hvilket vi i jagten på flere transfinite kardinaltal bliver præsenteret for en mængde hvis elementer selv er mængder, nemlig alle delmængderne for en given mængde.

Vi har fundet (defineret) to kardinaltal for uendelige mængder, $\aleph_0$ og $\aleph$, og vi vil nu gå på jagt efter flere. Men hvor finder vi dem? Vi får ingen hjælp ved igen at se på tallinjen, for med de reelle tal er alle punkter på den repræsenteret. Vi har derfor en 1-1 korrespondance mellem mængden **R** og mængden af punkter på tallinjen, og sidstnævnte må derfor også have kardinaltallet $\aleph$.

Vi starter jagten på nye kardinaltal ved at se på alle mulige delmængder af en endelig mængde, f.eks. mængden bestående af de tre tal 2, 3, 5: {2,3,5}.
Alle de mulige delmængder af {2,3,5} er opremset her:

{2}, {3}, {5}, {2,3}, {2,5}, {3,5}, {2,3,5}, **Ø**

De to sidste delmængder er specielle, men skal med: hele mængden {2,3,5} samt den tomme mængde **Ø**.
Der er som det ses i alt 8 delmængder af {2,3,5}. Og det må der jo være. For vi kan for hvert af de tre elementer spørge: skal dette element være med, 'ja' eller 'nej'? Med to mulige svar må det samlede antal muligheder for alle tre elementer være 2*2*2 = 8 = 2^3 (3. potens af 2).
Vi bemærker desuden at antallet af mulige delmængder er større end antallet af elementer i mængden: $2^3 > 3$.

Generelt vil der for en endelig mængde med n elementer være 2^n ($n \geqq 1$) mulige delmængder, altså n. potens af 2. Vi kalder derfor **mængden af alle delmængder** for **potensmængden**. Potensmængden for mængden {2,3,5} skrives: **P**({2,3,5}). Der gælder generelt for endelige mængder at antallet af delmængder i potensmængden er større end antallet af elementer i mængden, idet $2^n > n$ for alle naturlige tal n.

Også for uendelige mængder kan vi tale om potensmængden, defineret som mængden af alle delmængder - og den mængde må så også være uendelig.

Vi vil nu se på potensmængden af de naturlige tal **N**, betegnet **P(N)**. Den består af alle mulige delmængder af **N**, både endelige og uendelige, f.eks. mængden {2,3,5}, mængden af alle lige tal eller mængden af alle primtal, etc. Samt den tomme mængde **Ø** og hele mængden **N**.

Hvor mange elementer er der i **P(N)** - eller rettere, hvad er kardinaltallet for **P(N)**? Et første umiddelbart bud på dette kunne være at **P(N)** er nummerabel, og derfor at **|P(N)|** = **|N|** = $\aleph_0$.
Det vil vi nu vise *ikke* er tilfældet! Vi giver et indirekte bevis, og vi gør igen brug af ideen bag Cantor's diagonal-argument, som jo tidligere blev benyttet til at vise at **R** ikke er nummerabel.

En bestemt delmængde af **N** kan beskrives i et slags kode-sprog. Vi forestiller os at vi har skrevet en linje med alle de naturlige tal: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...
Nedenunder skriver vi en linje som kun består af 0'er og 1'er.
Hvis et naturligt tal er med i en given delmængde, skrives 1 under tallet, hvis det ikke er med, skrives 0. På den måde kan delmængden defineres ved en linje med en uendelig række af 0'er og 1'er. Som eksempel vises her starten på koden for delmængden bestående af alle primtal:

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**...**
0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	**...**

Vi antager nu at **P(N)**, mængden af alle delmængder af **N**, er nummerabel.
I så fald kan der laves en opremsning i form af en liste, hvor hver linje består af 0'er og 1'er svarende til en bestemt delmængde af **N**. Hvilket system vi har fundet på til denne opremsning er ikke afgørende, antagelsen går blot på, at det er muligt at opremse, og dermed nummerere, delmængderne.

De første linjer eller tabel-rækker af en sådan liste kan f.eks. se således ud:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**...**
0	**0**	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	**...**
1	0	**1**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	**...**
2	1	0	**1**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	**...**
3	0	0	1	**1**	0	1	0	1	0	0	0	1	**...**
4	1	1	0	0	**1**	0	0	0	0	1	0	0	**...**
5	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0	0	**...**
6	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	**...**
7	1	0	0	1	0	0	1	**0**	0	1	0	0	**...**
8	1	1	0	1	0	0	1	0	**0**	0	1	0	**...**
9	1	1	1	0	0	0	1	0	0	**0**	0	0	**...**
10	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	**1**	0	**...**
11	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	**0**	**...**
...	**...**	**...**	**...**	**...**	**...**	**...**	**...**	**...**	**...**	**...**	**...**	**...**	**...**
	0	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	...
	1	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	...

Øverste række i tabellen (med fede typer) indeholder de naturlige tal **N**.
De øvrige rækker viser forskellige delmængder af **N** i vores 0/1-kodesprog.
Rækkerne er nummereret (med fede typer) i søjlen til venstre.
I eksemplet her kunne delmængde nummer 0 være den endelige mængde {1,2,3} (forudsat at der efter 3 står uendelig mange 0ér i rækken). Tilsvarende kunne delmængde nummer 1 være de ulige tal, nummer 2 de lige tal, nummer 3 primtallene, 4 kvadrattallene, 5 er den tomme mængde **Ø**, 6 er hele **N**, 7 er tal som 3 går op i, etc. En delmængde kan også være et helt tilfældigt udvalg af naturlige tal. Rækkerne fortsætter nedenunder i det uendelige sådan at alle de uendelig mange delmænger af **N** er repræsenteret.

Tallene i tabellens diagonal er farvet røde og de er ført ned så de danner en rød talrække. De grønne tal fremkommer af de røde tal ved at hvert 0 erstattes af 1, og hvert 1 erstattes af 0. Så kan det grønne tal ikke forekomme nogen steder i tabellen, for det adskiller sig fra 0. række ved 0. element, 1. række ved 1. element, 2. række ved 2. element, ... , n. række ved n. element, ... etc.
Den delmængde som det grønne tal svarer til (som bl.a. her indeholder elementerne 0, 5, 7, 8, 9 og 11) findes derfor ikke repræsenteret i listen - og dette er i strid med at vi antog, at det var muligt at lave en nummereret liste over alle mulige delmængder af **N**. Antagelsen, at **P(N**) er nummerabel, må derfor forkastes. **P(N**) er *ikke* nummerabel.

Det betyder at kardinaltallet for **P(N)**, betegnet **|P(N)|**, er forskelligt fra **|N|** = $\aleph_0$:

$$|P(N)| \neq \aleph_0$$

Og vi kan sige mere, nemlig at **|P(N)|** må være større end $\aleph_0$:

$$|P(N)| > \aleph_0$$

For at vise dette må vi checke om definitionen af det stærke ulighedstegn for kardinaltal er opfyldt for kardinaltallene $\aleph_0$ = **|N|** og **|P(N)|**.

For det første kan vi finde en 1-1 korrespondance mellem **N** og en ægte delmængde af **P(N)**. Vi kan nemlig til hvert tal i **N** lade svare den delmængde af **P(N)** som kun indeholder netop dette ene tal. F.eks. til tallet 7 lader vi svare delmængden {7}, til tallet 9 delmængden {9}, 13 til {13}, etc.

For det andet kan vi *ikke* finde en 1-1 korrespondance mellem **P(N)** og en delmængde af **N**, for det ville jo netop betyde at **P(N)** var nummerabel (eller endelig), hvilket vi lige har vist ikke er tilfældet.

For en endelig mængde med n elementer fandt vi tidligere, at antallet af elementer i mængdens potensmængde bliver 2^n. Inspireret af dette vil vi definere følgende symbolske skrivemåde for sammenhængen mellem de transfinite kardinaltal $\aleph_0$ og **|P(N)|**:

$$|P(N)| = 2^{\aleph_0}$$

og vi har altså at:

$$2^{\aleph_0} > \aleph_0$$

Vi har nu tre kardinaltal for de tre mængder **N**, **R** og **P(N)**, henholdsvis $\aleph_0$, $\aleph$, og **|P(N)|**. Vi ved at $\aleph > \aleph_0$ og at **|P(N)|** > $\aleph_0$, men vi ved endnu intet om hvordan **|P(N)|** og $\aleph$ relaterer til hinanden - eller om de overhovedet kan sammenlignes ! Det vil vi undersøge i det følgende.

Kapitel 16. Sammenligning af kardinaltallene **|P(N)| og** ℵ.

I hvilket vi viser at der er en sammenhæng mellem kardinaltallet for potensmængden for de naturlige tal og kardinaltallet for de reelle tal.

Vi vil vise at der kan etableres en 1-1 korrespondance mellem **R** og potensmængden for **N**, **P(N)**. Dvs. at **P(N)** har samme mægtighed som **R** og at:

$$|P(N)| = \aleph$$

Dette er opfyldt hvis vi kan vise at det er muligt at lave en 1-1 korrespondance mellem **P(N)** og de reelle tal mellem 0 og 1 og dermed med hele **R**.
Vi benytter samme "kode-sprog" for delmængderne af **N** som tidligere, dog her med en lille variation. Koden for f.eks.. delmængden bestående af alle primtal så således ud:

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**...**
0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	**...**

Rækken af 0'er og 1'er vil vi her erstatte af en uendelig decimalbrøk. Vi sætter et '0,' ('nul komma') foran og får så i dette tilfælde:

0,001101010001 ...

Alle delmængder af **N** kan på denne måde korrespondere med et reelt tal mellem 0 og 1. Men det er godt nok nogle ret specielle reelle tal, for vi får kun dem med som kan skrives som decimalbrøker kun bestående af 0'er og 1'er.
Dette problem løser vi ved at skifte talsystem. Normalt benytter vi 10-talsystemet med de 10 cifre 0, 1, 2, ... , 9. Men det skyldes jo blot den "tilfældighed" at vi har 10 fingre! Hvis vi kun havde haft 2 fingre (1 på hver hånd) ville vi have talt på denne måde:

0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, ...

Når de 1-cifrede tal slipper op, skifter vi til 2 cifre ved hjælp af positionssystemet.
I 10-talsystemet betyder f.eks. '123' 1 hundreder plus 2 tiere plus 3 enere,
eller $123 = 1*10^2 + 2*10 + 3$.
Tilsvarende vil i 2-talsystemet '101' oversat til 10-talsystemet betyde
$1*2^2 + 0*2 + 1 = 5$.

Det er muligt at oversætte alle tal, også decimalbrøker, fra det ene talsystem til det andet. Således vil alle reelle tal mellem 0 og 1 i 2-talsystemet kunne repræsenteres ved decimalbrøker kun bestående af cifrene '0' og '1'.

Se evt. mere om dette i appendiks 7, Talsystemer.

Det betyder at vi ved hjælp af vores variation i kode-sproget for delmængderne af **N** har etableret en 1-1 korrespondance mellem potensmængden **P(N)** og de reelle tal mellem 0 og 1 (og dermed med alle reelle tal **R**) eller at:

$$|P(N)| = \aleph$$

Endelige decimalbrøker må opfattes som periodiske med efterfølgende 0'er, f.eks. skal 0,1 skrives som 0,1**0**00... .
Men beviset har desværre en fejlslutning - netop vedrørende endelige decimalbrøker.
Vi benytter faktisk en sammensætning af to 1-1 korrespondancer. Vi har en 1-1 korrespondance mellem mængden af delmængder af **N** og decimalbrøker mellem 0 og 1 skrevet i 2-talsystemet. Desuden forudsætter vi at der er en 1-1 korrespondance mellem disse decimalbrøker og de reelle tal mellem 0 og 1. Altså at der til hvert reelt tal mellem 0 og 1 entydigt svarer én bestemt decimalbrøk. Men dette er ikke tilfældet! F.eks. kan den endelige decimalbrøk i 2-talsystemet 0,1 også skrives som 0,0**1**11... Tilsvarende er i 10-talsystemet f.eks. 2,5 = 2,4**9**99... Heldigvis kan denne fejl i beviset udbedres.
Se om manglende entydighed for endelige decimalbrøker til sidst i appendiks 4.
Se mere om udbedring af fejl i beviset for **|P(N)|** = $\aleph$ i appendiks 8.

Konklusionen er, at mængden af alle delmængder af de naturlige tal er lige så mægtig som de reelle tal. Dette virker nok temmelig kontra-intuitivt, især når vi tænker på punkter på tallinien. De naturlige tal afsat på tallinien ligger pænt adskilt (diskret). De reelle tal ligger ikke blot uendelig tæt på tallinien, men fylder den helt ud. Med mængden af alle delmængder af de naturlige tal får vi trods dette en mængde som kan 1-1 korrespondere med mængden af alle punkter på tallinien.

Vi har indtil nu ikke fundet flere end de to kardinalttal $\aleph_0$ og $\aleph$. Ved at se på potensmængden for en vilkårlig mængde vil vi i næste kapitel se, hvordan ethvert kardinaltal kan generere et efterfølgende større kardinaltal, så vi går fra at kende to til at kende uendelig mange kardinaltal.

Produktmængder blev kort omtalt i slutningen af kapitel 5. Produktmængden **N**x**N**x**N**... med uendelig mange **N**'er er mængden indeholdende uendelig mange ordnede tal (x,y,z,...).
Man kan med samme metode brugt i dette kapitel argumentere for at **N**x**N**x**N**... er lige mægtig med **P(N)**, og dermed med **R**, og derfor har kardinaltallet $\aleph$.

Kapitel 17. Potensmængden for en vilkårlig mængde, Cantor's teorem.

I hvilket vi generaliserer og ser på ikke-nummerable mængders potensmængde, samt beviser Cantor's teorem om kardinaltallet for en sådan.

For enhver nummerabel mængde **M** bliver kardinaltallet for potensmængden **P(M)** lig med **|P(N)|**. For vi kan etablere en 1-1 korrespondance mellem **P(M)** og **P(N)** via nummeringen af elementerne i **M** ved hjælp af ovenstående kode-sprog. Hvis vi skal fortsætte jagten på kardinaltal må vi derfor se på ikke-nummerable mængder. Vi vil i dette kapitel gå mere generelt til værks og se på potensmængden for en vilkårlig mængde.

For en vilkårlig mængde **A** defineres potensmængden som mængden af alle mulige delmængder af **A** og den betegnes **P(A)**.

Vi vil vise at der helt generelt gælder, at kardinaltallet for potensmængden **P(A)** for en vilkårlig mængde **A** er større end kardinaltallet for **A**, altså:

$$|P(A)| > |A| \quad \text{eller} \quad 2^{|A|} > |A|$$

hvor vi har benyttet at vi som definition vil skrive: $|P(A)| = 2^{|A|}$
Dette kaldes **Cantor's teorem**.

I første omgang vil vi vise at:

$$|P(A)| \neq |A|$$

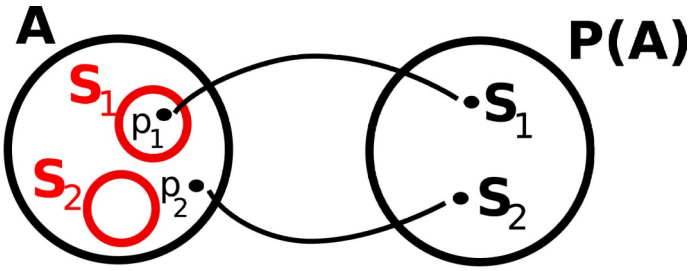
Det gør vi ved at antage det modsatte og vise at dette fører til en modstrid.
Så vi antager at:

$$|P(A)| = |A|$$

Når kardinaltallene for **A** og **P(A)** er identiske må der findes en 1-1 korrespondance mellem **A** og **P(A)**. Dvs. til hvert element i **A**, f.eks. elementet p, svarer præcis ét element i **P(A)**, altså præcis én delmængde **S** af **A**, $S \subseteq A$.

Med den pågældende 1-1 korrespondance kan der nu være to muligheder for elementet p i **A** og den korresponderende delmængde **S** af **A**:
Enten vil p (tilfældigvis) tilhøre **S**, eller også vil p ikke tilhøre **S**.
Vi definerer nu nogle betegnelser:

Hvis et element p_1 tilhører sin egen korresponderende delmængde $\mathbf{S_1}$, vil vi kalde elementet 'Glad'.
Hvis et element p_2 ikke tilhører sin egen tilhørende delmængde $\mathbf{S_2}$, vil vi kalde elementet 'Trist'.

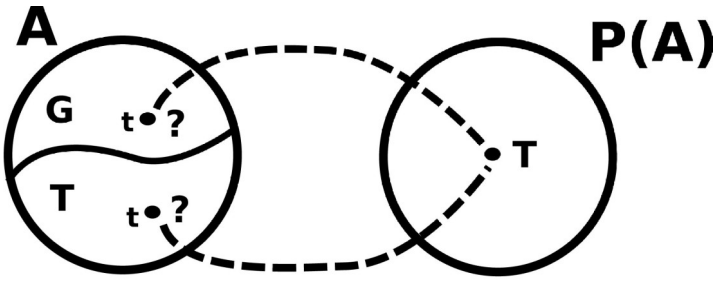


p_1 er element i **A** og korresponderer med delmængden $\mathbf{S_1}$ som er element i **P(A)**.
Da p_1 samtidig tilhører delmængden $\mathbf{S_1}$ er p_1 et Glad element.
p_2 er element i **A** og korresponderer med delmængden $\mathbf{S_2}$ som er element i **P(A)**.
Da p_2 ikke tilhører delmængden $\mathbf{S_2}$ er p_2 et Trist element.

Vi ved at begge slags elementer må forekomme. For vi har jo i **P(A)** de to specielle delmængder af **A**, den tomme mængde **Ø**, og hele mængden **A**.
Der må jo være et element i **A** som korresponderer med **Ø**. Og da den tomme mængde ikke indeholder nogen elementer, må det tilsvarende element i **A** være Trist. Tilsvarende må der være et element i **A** som korresponderer med hele **A**. Og da **A** indeholder alle sine elementer, må dette element være Glad.

Som eksempel kan vi se på specialtilfældet hvor vi har mængden **N** og dens potensmængde **P(N)**. Hvis f.eks. ved 1-1 korrespondancen tallet 3 svarer til delmængden bestående af alle primtal, vil tallet 3 være Glad, da 3 jo selv er et primtal. Hvis f.eks. ved 1-1 korrespondancen tallet 5 svarer til delmængden bestående af alle kvadrattal, vil tallet 5 være Trist, da 5 ikke selv er et kvadrattal.

Vi kan nu opdele elementerne i **A** i to klasser, de Glade elementer **G** og de Triste elementer **T**. De to klasser er delmængder af **A**, de har ingen elementer til fælles og tilsammen udgør de to delmængder hele **A**.



Vi vil specielt se på delmængden **T** bestående af alle de Triste elementer.
T er en delmængde i **A** og dermed et element i **P(A)**. Der må derfor ved den givne 1-1 korrespondancen mellem **A** og **P(A)** til **T** svare et element, t, i **A**.
Spørgsmålet er nu: Er dette element, t, et Glad eller et Trist element?

(1) Lad os antage at t er Glad, dvs. t tilhører **G**, og tilhører dermed ikke **T** som t korresponderer med som element i **P(A)**. Men så må t være Trist!
(2) Omvendt, lad os antage at t er Trist, dvs. t tilhører **T** som t korresponderer med som element i **P(A)**. Men så må t være Glad!

I begge tilfælde får vi en modstrid. Men så må den grundlæggende antagelse forkastes. Dvs. at det ikke er muligt at finde en 1-1 korrespondance mellem mængden **A** og dens potensmængde **P(A)**.

Vi kan derimod godt finde en 1-1 korrespondance mellem **A** og en ægte delmængde af **P(A)**. Vi kan til ethvert element q i **A** lade svare den delmængde som præcis indeholder dette ene element q, altså {q}, og tilsvarende for ethvert andet element i **A**. Elementerne i den ægte delmængde i **P(A)** som **A** herved korresponderer med, er alle mulige delmængder af **A** med præcist ét element.

Til illustration i specieltilfældet med **N** og **P(N)** vil ved denne 1-1 korrespondance tallet 1 svare til mængden {1}, 2 svarer til {2}, ... n svarer til {n} ... etc. Og den ægte delmængde i **P(N)** som **N** korresponderer med kan så skrives: { {1}, {2}, {3}, ... {n}, ... }.

Betingelserne for det stærke ulighedstegn i **|A|** < **|P(A)|** er nu opfyldt:
(1) Der findes en 1-1 korrespondance mellem **A** og en ægte delmængde af **P(A)**. Dvs. at det svage ulighedstegn gælder, **|A| ≦ |P(A)|**.
(2) Der findes *ikke* en 1-1 korrespondance mellem **P(A)** og en delmængde af **A**. Hvis der gjorde, ville der nemlig så også gælde at **|P(A)| ≦ |A|**.

I så fald ville betingelserne i CSB-teoremet være opfyldt, og der ville gælde:

$$|A| \leqq |P(A)| \quad \text{og} \quad |P(A)| \leqq |A| \quad \Rightarrow \quad |A| = |P(A)|$$

altså at der findes en 1-1 korrespondance mellem **A** og **P(A)**, hvilket vi netop har vist ikke er tilfældet.

Vi kan derfor konkludere at det for en vilkårlig mængde **A** gælder, at mængdens potensmængde har større kardinaltal end mængden selv:

$$|A| < |P(A)| \quad \text{eller} \quad |P(A)| > |A|$$

Hermed er Cantor's teorem bevist.
Vi kan som før nævnt også skrive:

$$|P(A)| = 2^{|A|} \quad \text{og} \quad 2^{|A|} > |A|$$

Kapitel 18. Egenskaber for uendelige mængder og kardinaltal

I hvilket vi ser på udvalgte konsekvenser af teorien for uendelige mængder og deres kardinaltal.

Fra kun at have kendt to transfinite kardinaltal, $\aleph_0$ og $\aleph$, har vi nu uendelig mange. For Cantor's teorem viser os, at der for enhver uendelig mængde $\mathbf{A_1}$ med kardinaltal $\mathbf{|A_1|}$ findes en mængde, potensmængden $\mathbf{A_2} = \mathbf{P(A_1)}$, med et større kardinaltal $\mathbf{|A_2|} = 2^{|A1|}$ og så fremdeles. En given mængde afføder altså en uendelig række af stigende kardinaltal:

$$|A_1| < |A_2| < |A_3| < |A_4| \ldots$$

Hvis vi specielt starter med kardinaltallet for de naturlige tal, $\aleph_0$, bliver det følgende kardinaltal i rækken $\aleph_1 = \aleph$, kardinaltallet for de reelle tal. Det næste kardinaltal er så kardinaltallet for potensmængden for de reelle tal, $\aleph_2$, etc.
Vi har så:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 \ldots$$

hvor det n+1. kardinaltal kan udtrykkes ved det n. kardinaltal således:

$$\aleph_{n+1} = 2^{\aleph n}$$

At der findes mængder som er mere mægtige end de reelle tal og mængden af punkter på den rette linje (kontinuum) virker jo ret forbløffende og kontra-intuitivt (som meget andet i teorien for uendelige mængder).

Vi ser nu i det følgende på udvalgte konsekvenser af teorien for kardinaltal og af teorien for uendelige mængder i det hele taget.

1. *Er $\aleph_0$ det mindste transfinite kardinaltal der findes?*
Svaret er ja, og det kan vises således:
Se på en vilkårlig uendelig mængde **S** med kardinaltallet **|S|**.
Da **S** er en uendelig og dermed ikke-tom mængde, kan vi fra **S** fjerne et af dens elementer, f.eks. a_1. Resten af **S** er stadigvæk en uendelig og ikke-tom mængde, og vi kan derfor fjerne endnu et element a_2. Bliver vi ved på denne måde, kan vi fra **S** fjerne den uendelige mængde **A** = $\{a_1, a_2, a_2, ...\}$ som er nummerabel og derfor har kardinaltallet $\aleph_0$.
Vi kan nu etablere en 1-1 korrespondance mellem **A** og en delmængde af den oprindelige mængde **S**, nemlig **A** selv betragtet som delmængde af **S**, **A** $\subseteq$ **S**.
Det gør vi ved til hvert element i **A**, f.eks. a_1, at lade svare det tilsvarende element a_1 i **S**. Men så har vi at:

$$|A| \leqq |S| \quad \text{eller} \quad \aleph_0 \leqq |S|$$

Da **S** var en vilkårlig uendelig mængde, betyder dette at enhver uendelig mængde må have et kardinaltal som mindst må være $\aleph_0$.
$\aleph_0$ må derfor være det mindste transfinite kardinaltal der findes.

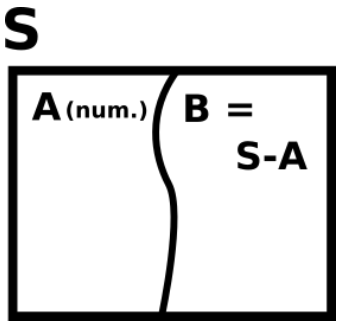
2. *Findes der kardinaltal imellem $\aleph_0$ og $\aleph_1$ - og tilsvarende mellem de næste i rækken af kardinaltal? Altså findes der for eksempel en uendelig mængde som ikke er nummerabel, men med et kardinaltal $\aleph_x$ mindre end kardinaltallet for de reelle tal:*

$$\aleph_0 < \aleph_x < \aleph \ ?$$

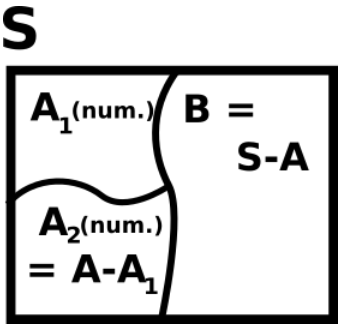
Med svaret 'nej' til dette spørgsmål kaldes dette for **kontinuumhypotesen**.
Ifølge den findes der ingen mængde med et kardinaltal mellem $\aleph_0$ og det næste i rækken $\aleph_1 = \aleph$.
Det lykkedes ikke for Cantor hverken at bevise eller modbevise kontinuum-hypotesen. I 1938 viste Kurt Gödel at kontinuumhypotesen ikke kan modbevises. I 1963 viste Paul Cohen at kontinuumhypotesen ikke kan bevises. Kontinuumhypotesen er uafgørlig på grundlag af det aksiomssystem som ligger til grund for teorien for mængder og tal.
Den generaliserede kontimuumhypotese siger tilsvarende, at det ikke er muligt at finde uendelige mængder med kardinaltal mellem nogen af de øvrige kardinaltal i rækken $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2$ ...

3. *For en vilkårlig nummerabel mængde gælder, at det er muligt at fjerne uendelig mange elementer, således at rest-mængden stadigvæk er uendelig og nummerabel.*
F.eks. kan vi fra **N** fjerne alle lige tal, tilbage bliver de ulige tal.
Inspireret af dette eksempel kan reglen vises generelt ved i en vilkårlig nummerabel mængde, **A**, at sætte indeks på elementerne (netop muligt fordi den er nummerabel). Så vi sætter **A** = {a_1, a_2, a_3, a_4, ... }. Vi kan så f.eks. fjerne alle elementerne med lige indeks, {a_2, a_4, a_6, a_8, ... }, og tilbage bliver så mængden bestående af elementer med ulige indeks, {a_1, a_3, a_5, a_7, ... }, og denne mængde er uendelig og nummerabel.
Bemærk at dette punkt ikke siger, at man kan fjerne en vilkårlig uendelig delmængde og få en uendelig nummerabel restmængde. Vi kan f.eks. ikke fjerne alle naturlige tal større end 3, for tilbage vil så være en endelig mængde, {0, 1, 2, 3}.
Derimod gælder, at hvis vi fjerner endelig mange elementer fra en nummerabel mængde, vil rest-mængden altid stadigvæk være uendelig og nummerabel.
Begrund dette ved at finde en passende 1-1 korrespondance i eksemplet med {0,1,2,3}.

4. *For en vilkårlig ikke-nummerabel uendelig mængde, dvs. en mængde hvis kardinaltal er større end $\aleph_0$, gælder, at hvis vi fjerner uendelig mange nummerable elementer, så vil rest-mængden stadigvæk have samme kardinaltal som den oprindelige mængde.* (Dette er en generalisation af punkt **3**.)

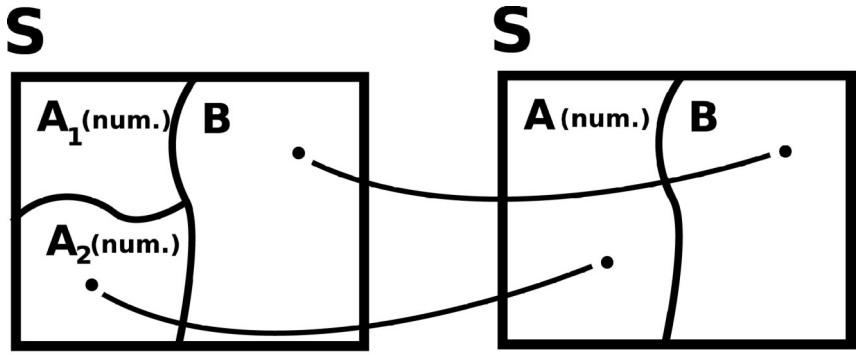


Vi kalder den ikke-nummerable mængde **S** og dens kardinaltal $\aleph_S$. I beviset i punkt **1** så vi, at det er muligt fra **S** at udskille en uendelig nummerabel ægte delmængde **A** = {a_1, a_2, a_3, ...}.
Lad os kalde rest-mængden for **B**. Med mængde-symbolik er **B** = **S-A**. **S** er altså nu opdelt i to mængder, **A** og **B** = **S-A**. Tilsammen udgør **A** og **B** hele **S** og vi kan skrive: **S** = **A** U **B**, foreningsmængden af **A** og **B**.



Ifølge punkt **3** kan vi i den nummerable mængde **A** udskille en nummerabel ægte delmængde $\mathbf{A_1}$ således at rest-mængden $\mathbf{A_2}$ = **A**-$\mathbf{A_1}$ er nummerabel.
De to mængder $\mathbf{A_2}$ og **B** har ingen elementer tilfælles og tilsammen udgør de en ægte delmængde af **S**, som vi vil betegne $\mathbf{A_2}$ U **B** (foreningsmængden af $\mathbf{A_2}$ og **S**).

Vi kan nu etablere en 1-1 korrespondance mellem $\mathbf{A_2}$ U **B** og **S** = **A** U **B**.



1-1 korrespondance mellem $\mathbf{A_2}$ U **B** og **S** = **A** U **B**

Til et element i $\mathbf{A_2}$ kan vi ved en passende 1-1 korrespondance lade svare et element i **A**. Dette kan lade sig gøre fordi **A** og $\mathbf{A_2}$ begge er nummerable.
Til et element i **B** kan vi simpelthen som 1-1 korrespondance lade svare elementet selv.
Alt i alt har vi fra **S** fjernet den nummerable mængde $\mathbf{A_1}$, og rest-mængden i **S** er den ægte delmængde $\mathbf{S}$-$\mathbf{A_1}$ = $\mathbf{A_2}$ U **B**. Derefter har vi vist, at det er muligt at etablere en 1-1 korrespondance mellem $\mathbf{A_2}$ U **B** og hele **S**. Kardinaltallet for rest-mængden $\mathbf{A_2}$ U **B** må derfor være det samme kardinalttal $\aleph_S$ som for **S**.

Eksempel. Lad den ikke-nummerable mængde være de reelle tal **R**. Fra dem udskiller vi de naturlige tal **N** (svarende til **A** i beviset). Restmængden er **B** = **R-N**. Fra **N** udskiller vi de ulige tal ($\mathbf{A_1}$). Vi kan så etablere en 1-1 korrespondance mellem rest-mængden bestående af de lige tal ($\mathbf{A_2}$) forenet med restmængden **B**, dvs. mellem $\mathbf{A_2}$ U **B**, og hele **R**. Rest-mængden $\mathbf{A_2}$ U **B** har derfor kardinaltallet $\aleph$.

Eksempel. Hvis vi ønsker at vise at R-N har kardinaltallet $\aleph$, kan vi f.eks. for at danne **A** vælge først at udskille de naturlige tal **N** og derefter endnu en nummerabel mængde $\{a_0, a_1, a_2, a_3, ...\}$ hvor elementerne $a_0, a_1, a_2, a_3, ...$ er andre elementer udvalgt fra **R-N**. **A** kommer til at bestå af de to nummerable mængder "flettet sammen":
A = $\{0, a_0, 1, a_1, 2, a_2, 3, a_3, ...\}$ og vi får rest-mængden **B** = **R-A**.
Som $\mathbf{A_1}$ vælges **N** = {0, 1, 2, 3, ... } og så bliver $\mathbf{A_2} = \{a_0, a_1, a_2, a_3, ...\}$.
Vi kan derefter etablere en 1-1 korrespondance mellem **R**-**N** = $\mathbf{A_2}$ U **B** og og hele **R**.
R-N har derfor kardinaltallet $\aleph$.
Generelt kan vi ved denne metode begrunde, at vi kan fjerne en vilkårlig valgt nummerabel delmængde uden at ændre kardinaltallet for den oprindelige mængde **R**. Dette ræsonnement kan naturligvis også benyttes for en uendelig mængde **S** med kardinaltal større end $\aleph$.

Vis at kardinaltallet for de irrationelle tal er lig kardinaltallet for de reelle tal, $\aleph$.

Dette "trick" at udskille en nummerabel mængde fra en ikke-nummerabel mængde benyttes ofte i mængde-teorien. Noget tilsvarende ses i appendiks 6C.

Bemærk at vi med dette punkt har fundet redskabet til at udbedre den fejl der var i beviset i kapitel 16 og behandlet i appendiks 8, for at **|P(N)|** = ℵ. Her påstod vi, at vi kunne fjerne den nummerable delmængde bestående af alle tal med endelige decimalbrøker fra de reelle tal og stadigvæk bevare restmængdens kardinaltal ℵ.

I punkterne 1, 3 og 4 har vi i argumentationen brugt at udskille uendelig mange elementer fra en mængde. Det er ikke en selvfølge at man kan det. I den aksiomatiske mængde-teori er man nødt til at tilføje et aksiom, '**udvalgs-aksiomet**', som tillader dette.
Dette uddybes lidt mere i kapitel 20.

5. *Hvis en mængde er uendelig, er det muligt at finde en ægte delmængde således at der kan etableres en 1-1 korrespondance mellem den ægte delmængde og mængden selv.*
Hvis mængden er nummerabel følger dette af punkt af punkt **3**, og hvis mængden er ikke-nummerabel følger det af punkt **4**.

En endelig mængde har ikke denne egenskab, idet antallet af elementer i enhver ægte delmængde vil være mindre end antallet af elementer i mængden selv. Det betyder at en mængde som har denne egenskab må være uendelig.
Vi kan derfor (som lovet i kapitel 4) skærpe punkt **5** til:

At en mængde er uendelig er ensbetydende med, at det er muligt at finde en ægte delmængde af mængden, sådan at der kan etableres en 1-1 korrespondance mellem den ægte delmængde og mængden selv.

Den tyske matematiker Richard Dedekind (1831-1916) foreslog ligefrem at dette kunne være en passende definition for at en mængde er uendelig.
Vi har strengt taget aldrig her givet en præcis definition på hvad det vil sige at en mængde er uendelig. I den mest gængse aksiomatiske teori for mængder defineres en uendelig mængde som en mængde der ikke er endelig. Og en endelig mængde defineres som en mængde hvis kardinaltal er endeligt, dvs. tilhører de naturlige tal **N**. Dette kan lyde som en "cirkel-definition", men er det ikke, når man går ud fra en præcis definition af hvad kardinaltal og naturlige tal er. Ud fra dette vil egenskaben for uendelige mængder her i punkt **5** kunne afledes som et teorem.

6. *Kan to vilkårlige uendelige mængders kardinaltal altid sammenlignes?. Eller mere præcist: Er det altid muligt for to vilkårlige mængder,* ***A*** *og* ***B****, at afgøre om en af disse muligheder foreligger:*

$$|A| < |B| \text{ eller } |A| = |B| \text{ eller } |A| > |B|?$$

Eller, formuleret med '≦': For to vilkårlige mængder, ***A*** *og* ***B****, gælder:*

$$|A| \leqq |B| \text{ eller } |A| \geqq |B|.$$

Svaret 'ja' til dette punkt for transfinite kardinaltal er ingen selvfølge. Det svarer til at spørge: Vil det altid være muligt for to helt vilkårlige uendelige mængder, at etablere en 1-1 korrespondance mellem den ene og en (ægte) delmængde af den anden? Beviset kræver også her udvalgs-aksiomet som forudsætning.

7. *Ligger alle transfinite kardinaltal i den ene uendelige række startende med* $\aleph_0$*, eller kan man frembringe en helt ny række ved at starte med en anden mængde end* ***N*** *og de deraf følgende potensmængder?*
Svaret er: *Alle transfinite kardinaltal ligger i den uendelige række med udgangspunkt i* $\aleph_0$*.* - Også dette svar afhænger dybt af aksiomatikken bag mængde-teorien.

8. *Regneregler for kardinaltal.*
Ud fra en mere præcis definition af kardinaltal i den aktiomatiske mængde-teori kan man fastlægge en række regneregler for de transfinite kardinaltal. Udvalgte regler nævnes her. Nogle af dem kan ses som resultat af tidligere argumentationer eller intuitivt forstås ud fra det foregående. Andre (specielt for kardinaltal > $\aleph_0$) er ikke trivielle at bevise.
Betegnelser: Kardinaltallet for en nummerabel mængde er $\aleph_0$, for de reelle tal (kontinuum) er det $\aleph$, og for vilkårlige uendelige mængder **S** og **T** med transfinite kardinaltal større end $\aleph$ skriver vi $\aleph_S$ og $\aleph_T$.

$\aleph_0 + 7 = \aleph_0$.
Tilføjes til en nummerabel mængde en endelig mængde (her som eksempel en mængde med 7 elementer) bliver resultatet en nummerabel mængde.

$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.
Sammenfletning af to nummerable mængder giver en nummerabel mængde.
F.eks. vil sammenfletning af de naturlige tal og en nummerabel mængde indexeret med de naturlige tal være nummerabel (brugt i del **4** ovenfor):

$$\mathbf{A} = \{0, a_0, 1, a_1, 2, a_2, 3, a_3, ...\}$$

$\aleph_S + \aleph_S = \aleph_S$.
*Sammenfletning af to vilkårlige mængder **S** med samme transfinite kardinaltal, giver igen en mængde med samme transfinite kardinaltal.*

$\aleph_0 * \aleph_0 = \aleph_0$.
*Produktmængden **N x N** af ordnede talpar (x,y) af naturlige tal er nummerabel.*
Vi kan vise dette ved at bruge en parrings-funktion (kapitel 1, 5, 8 og app. 1).

$\aleph_S * \aleph_S = \aleph_S$, og specielt: $\aleph * \aleph = \aleph$.
*Produkmængden **R x R** (koordinaterne i et 2-dimensionelt koordinatsystem) har kardinaltallet* $\aleph$.
Den 2-dimensionale plan er et kontinuum med kardinaltallet $\aleph$. Tilsvarende med højere endelige dimensioner.

$\aleph_S + \aleph_T = \max(\aleph_S, \aleph_T)$.
*Kardinaltallet for sammenfletningen af to uendelige mængder, **S** og **T**, bliver det største af de to mængders kardinaltal.*
F.eks. vil de reelle tal sammenflettet med en nummerabel indekseret mængde have kardinaltallet $\aleph_0 + \aleph = \aleph$. (Jfr. del **4** ovenfor).

$\aleph_S * \aleph_T = \max(\aleph_S, \aleph_T)$.
*Kardinaltallet for produktmængden af to uendelige mængder, **S** x **T**, bliver det største af de to mængders kardinaltal. F.eks. vil **Q x R** have kardinaltallet* $\aleph$.

Disse regler gælder *ikke*: $\aleph_0 - \aleph_0 = \aleph_0$ eller $\aleph_0 - \aleph_0 = \mathbf{0}$.
I punkt 3 nævnte vi, at det nok er muligt at udtrække en nummerabel mængde fra en nummerabel mængde, men ved udtræk af en vilkårlig nummerabel mængde, kan resultatet være alt fra en nummerabel til en hvilken som helst endelig mængde.

Der gælder dog: $\aleph_S - \aleph_T = \aleph_S$ forudsat at $\aleph_S > \aleph_T$.
*Hvis vi udtrækker mængden **T** fra mængden **S**, hvor kardinaltallet for **S** er større end (men ikke lig med) kardinaltallet for **T**, får rest-mængden kardinaltallet for **S**.*
Antages "almindelig algebra" brugt på kardinaltal stemmer dette med reglen ovenfor for $\aleph_S + \aleph_T$. Punkt **4** er et specialtilfælde af dette.

Endelig minder vi om "potensopløftning": $\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$
Potensmængden for mængden med kardinaltallet $\aleph_n$ *har kardinaltallet* $2^{\aleph_n}$.

9. *Samlingen af alle kardinaltal udgør ikke en mængde.*
Dette lidt ejendommelig udsagn følger af at man er nødt til at begrænse mængdebegrebet for at undgå paradokser.
Vi kommer ind på paradokser i teorien for uendelige mængder i kapitel 20 og i appendiks 10.

10. *Mængden af udsagn om de naturlige tal er nummerabel, men mængden af 'sandheder' om de naturlige tal er ikke-nummerabel.*
Et udsagn indenfor et aksiomatisk system består af en streng af symboler svarende til en tekst. Symbol-strengene er endelige, men der er uendelig mange mulige strenge. Strengene kan f.eks. ordnes leksiografisk (alfabetisk), og dermed kan hver streng tildeles et nummer i et endeligt antal skridt. Mængden af symbol-strenge, og dermed specielt mængden af teoremer, er derfor nummerabel.
En bestemt egenskab ved udvalgte naturlige tal kan tilknyttes en delmængde af de naturlige tal: tallet n har egenskaben E hvis n tilhører delmængden **A**. Men da mængden af delmængder af de naturlige tal, potensmængden **P(N)**, er ikke-nummerabel, må det samme gælde mængden af egenskaber eller 'sandheder' om de naturlige tal.

Konklusionen af dette er, at det aksiomatiske system bag de naturlige tal aldrig vil kunne afdække alle sandheder om de naturlige tal via teoremer og deres beviser. Aksioms-systemet er 'ufuldstændigt'. Her skimter vi allerede i Cantor's mængde-teori det der senere (1930) af Kurt Gödel blev til Gödel's ufuldstændigheds-teorem. Det vil blive kort omtalt i kapitel 21.

11. *Tilbage til Hilbert's Hotel.*
Kære læser, du er da udholdende at du er nået hertil. Så jeg tillader mig at overlade det til dig at kortlægge forbindelserne mellem dele af denne mængde-teori og de forskellige udfordringer som receptionisterne i Hilbert's Hotel (kapitel 1) måtte finde en løsning på, herunder også den sidste udfordring som de måtte give op overfor.

Kapitel 19. Udviklingen af matematik på grundlag af aksiomer.

I hvilket vi kommer ind på udviklingen indenfor matematikken og omtaler den voksende interesse i at se på grundlaget for matematikken og dens aksiomatiske opbygning.

Alle matematiske begreber og regler søges indfanget i et system af grundlæggende forudsætninger: aksiomer, definitioner og slutningsregler. Ud fra dette grundlag søger man ved deduktion at bevise teoremer (sætninger), og beviset skal baseres på aksiomerne eller tidligere beviste teoremer.

Aksiomerne kan sammenlignes med reglerne for hvordan man må trække og tage de forskellige brikker i skak-spillet, og teoremer kan f.eks. være hvilke mulige kæder af træk to spillere kan lave ud fra en bestemt start-stilling, eller f.eks. hvilke stillinger på brættet som er umulige at opnå. Det kan også være f.eks. at bevise sætningen: "8 dronninger kan placeres på 12 forskellige måder på et skakbræt så de ikke kan tage hinanden, når der ses bort fra rotationer og symmetri-spejlinger".
Det er naturligvis væsentligt at aksiomerne er konsistente, dvs. at de ikke er i indbyrdes modstrid, direkte eller via afledte teoremer. Det samme gælder for reglerne for et spil. Hvordan vi kan være sikre på det, er til gengæld ikke ganske indlysende.

Opbygningen af en matematisk disciplin kan dog ikke helt sammenlignes med spilleregler. Matematikerne er ikke så frit stillet, men vil normalt søge at få systemet af aksiomer, definitioner og slutningsregler til at passe med vores intuitive forestillinger. Vi har f.eks. et mentalt billede af hvad et punkt, en ret linje og en cirkel er som idealiserede begreber. F.eks. den rette linje som "noget der er lige og udbreder sig i længden, men ikke i bredden", ikke som den linje vi tegner på et stykker papir. Disse forestillinger giver tilsyneladende mening og kan bruges til at give os inspiration til at udvikle mere viden om deres egenskaber. Men i det almindelige sprog er forestillingerne for uklare til at give os sikkerhed for, at det vi senere udleder er "sandt". Vi kan blive vildledt af vores forestillinger.

Derfor opstår ønsket om at opbygge et matematiske system frigjort fra enhver form for "mening", således at man ikke lader sig lokke til at drage slutninger ud fra andet end det rene aksioms-system, f.eks. om de ideelle geometriske begreber. Matematikere vil dog - som os andre "almindelige" mennesker - stadigvæk drives af intuition og mening undervejs i deres arbejde.

Interessen for at systematisere matematiske begreber ud fra principielle snarere end praktiske motiver voksede frem hos oldtidens grækere. Typisk for den tid er, at de ikke skelnede mellem faglige discipliner som vi kender det. Matematikken blev sammenvævet med hvad vi i dag vil kalde religion, mystik, musik, filosofi, metafysik, æstetik, politik, humaniora-videnskab og naturvidenskab.

Thales fra Milet (ca. 624-546 f.v.t.) forsøgte som den, så vidt vi ved, første at opbygge en geometri på et deduktivt grundlag. Blandt andre store milepæle i oldtiden af betydning for matematikken kan nævnes:
Pythagoras (ca. 582-507 f.v.t.), Platon (ca. 420'erne-348 f.v.t.),
Aristoteles (ca. 384-322 f.v.t.), Euklid af Alexandria (ca. 325-265 f.v.t.),
Arkimedes (ca. 287-212 f.v.t.), Apollonius af Perga (ca. 240-190 f.v.t.),
Ptolemeus (ca. 100-170 e.v.t.), Diophantos (i perioden 200-300 e.v.t.),
Pappos af Alexandria (ca. 290-350 e.v.t.), al Khowarizmi (ca. 780-850 e.v.t.).
Sidstnævnte er fra Persien, og ordene 'algebra' og 'algoritme' er i øvrigt afledninger fra hans navn. Han er medtaget her for at minde om, at oldtidens græske videnskab levede videre og udvikledes i de arabiske lande, for så i 1100-tallet at vende tilbage til Europa via det muslimske Syd-Spanien.

Euklid. Træskære-arbejde fra 1584

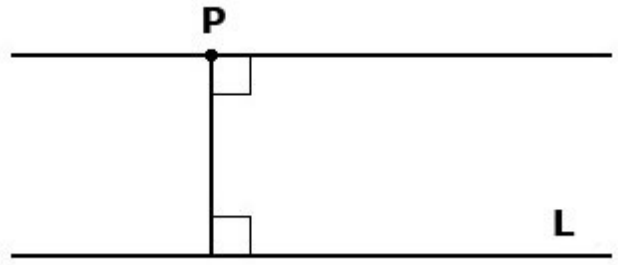
Euklid samlede oldtidens viden om geometri og tal i et stort værk, "Euklids elementer", og forsøgte - som måske den første - at opbygge et aksioms-system for geometrien bestående af 5 aksiomer og deraf følgende teoremer. "Euklids elementer" indeholder desuden også teoremer om tal præsenteret og bevist via geometriske overvejelser. Værket blev mangfoldiggjort ved trykning fra 1482 (trykpressen blev opfundet af Gutenberg i 1440) og blev i vid udstrækning brugt i skolers matematikundervisning helt frem til starten af 1900-tallet.

I løbet af 1400- og 1500-tallet, slutningen af renæssancen, fik udviklingen af matematikken fart på. Dette fortsatte i de følgende århundreder under den videnskabelige revolution. Frem mod slutningen af 1800-tallet var der skabt en mangfoldighed af matematiske discipliner og en stor tillid til at man kunne løse alle mulige problemer i matematik og med matematik. Men de mange forskellige discipliner var meget specialiserede, hver med deres metoder og terminologi. Selv om der skabtes masser af abstraktioner og teori havde man generelt en ret pragmatisk holdning til faget. Der blev lagt mere vægt på resultater og mindre vægt på beviser baseret på bestemte grundantagelser, aksiomer. For nogle matematikere var holdningen at matematik skulle udvikles for at løse problemer,

f.eks. i fysik, og faget betragtedes vel nærmest som en eksakt videnskab som skulle afspejle 'virkligheden', en videnskab på linje med naturvidenskaberne.

Fra midten til slutningen af 1800-tallet voksede et behov op for en mere overordnet samlende systematik i faget. Oldtidens interesse for at bygge på aksiomer og beviser som forsøgt af Euklid genopstod. Matematikken blev i højere grad betragtet som en formel videnskab. Man kan sige at holdningen til matematik skiftede fra at være noget der skulle opdages til noget der skulle opfindes.

Denne udvikling blev især sat igang, da man fandt frem til matematiske systemer som ikke umiddelbart afspejlede virkeligheden. Siden den græske oldtid havde f.eks. geometrien haft to roller. På den ene side blev den betragtet som en præcis beskrivelse af det rum vi lever i (noget vi opdager), på den anden side som en deduktiv aksiomatisk disciplin (noget vi opfinder).
Man fandt frem til at det var muligt at ændre Euklids 5. aksiom, det såkaldte parallel-postulat, og derved skabe to konsistente alternative matematiske geometrier som ikke umiddelbart stemte overens med vores normale opfattelse af plan og rum, de såkaldte ikke-euklidiske geometrier.



Euklids 5. aksiom, det såkaldte parallel-postulat siger (i en moderne formulering):

Givet en ret linje L og et punkt P udenfor denne. Der findes præcis én ret linje gennem punktet P parallel med L.

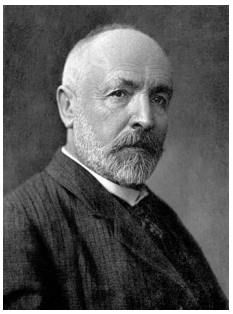
Negation af det 5. aksiom giver to alternativer:

1. Der findes ingen ret linje gennem punktet P parallel med linien L.
   'Elliptisk geometri', udviklet af Bernhard Riemann (tysk).
2. Der findes mere end én ret linje gennem punktet P parallel med linjen L.
   'Hyperbolsk geometri', udviklet af Nikolai Lobachevsky (russisk).

Man kan sige at de ikke-euklidiske geometrier blev "opfundet" ved at ændre på Euklids 5. aksiom - svarende til en ændring af reglerne for et spil som intet behøver at have med virkeligheden at gøre. Senere viste det sig dog, at de ikke-euklidiske geometrier kunne benyttes som matematisk værktøj til at beskrive den "krumme rum-tid" i Einsteins almene relativitetsteori fra 1915. I den forstand kan man sige at de ikke-euklidiske geometrier blev "opdagede".

Også tallene blev aksiomatiseret. Vores intuitive opfattelse af de naturlige tal blev søgt indfanget gennem et system, primært bestående af 5 aksiomer, af den italienske matematiker Giuseppe Peano (1858 - 1932). Senere opbyggede man de "højere" talsystemer, hele tal, også omfattende de negative tal, rationelle tal og reelle tal. Og man bevægede sig ud i helt nye typer "tal", de komplekse tal samt quaternioner og oktonioner. Også disse 'opfindelser' har vist sig at være særdeles nyttige redskaber i teknik og naturvidenskab.

Som i mange andre sammenhænge bag videnskabens, og her matematikkens, udvikling fremkommer elementerne til de nyeste opdagelser/opfindelser lidt efter lidt. F.eks. opfandt Rafael Bombelli allerede i 1572 det vi i dag kalder de komplekse tal, i forbindelse med hans arbejde med at finde en generel formel for løsningerne til en 3.grads-ligning.



Georg Cantor

I 1870'erne skabte Georg Cantor røre i matematiker-kredse med sit arbejde med begrebet 'uendelige mængder'. Man betragtede på det tidspunkt stadigvæk 'uendelighed' som et begreb man skulle undgå i matematik. Dog havde man allerede i renæssancen interesseret sig for uendelighed i forbindelse med perspektiv-tegning, hvor man i den såkaldte 'projektive geometri' definerer parallelle linjers 'skæringspunkt' ('fjernpunktet') som et uendelig fjernt punkt. Og senere havde f.eks. Newton og Leibnitz beskæftiget sig med uendelig små 'infinitesimale' størrelser ved udviklingen af differential- og intergral-regningen. Men at tale om at der kan være forskellige former for uendelige mængder, at ægte delmængder af uendelige mængder kan ses som lige så uendelige som mængden selv, samt ligefrem at skabe et nyt talbegreb, 'de transfinite kardinaltal' betragtedes af mange matematikere som det rene vanvid.
Men Cantor's mængde-teori kom hurtigt til at få enorm betydning for matematikkens udvikling, ikke mindst efter at Ernst Zermelo i 1908 og Abraham Fraenkel i 1921 underbyggede teorien med et nyt aksioms-system som - med modifikationer - er det mest anvendte i nutidens mængde- og tal-teori.

På mange måde ligner udviklingen af matematikken i perioden lige før og efter år 1900 meget udviklingen i naturvidenskaben, specielt fysik. En voksende tillid til fagets styrke efterfulgt af tvivl, krise og nye paradigmer. Der opstod behov for en samlende indsats i faget.

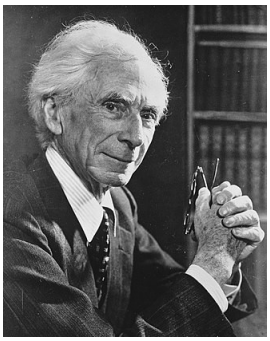
Ved en international kongres for matematikere i år 1900 fremlagde David Hilbert (1862-1943) en liste over 23 uløste problemer som han mente var afgørende for matematikkens videre udvikling. Nogle problemer angår matematikkens grundlag, andre er af mere pragmatisk natur. En del problemer er frem til i dag

løst eller delvist løst, 3-4 er stadig uløste, og et par er dømt at være for uklart eller for generelt formuleret til, at man kan sige om de er løst eller ej. Der er desuden fra fuld til kun delvis konsensus blandt matematikerne angående nogle af løsningerne. Som eksempel nævnes:

1. problem var at få afklaret om kontinuums-hypotesen kan bevises eller modbevises. Jævnfør omtalen i kapitel 18 punkt 2.
2. problem var ønsket om at få bevist at aksiomerne bag teorien for tal er konsistente, dvs. at de ikke kan føre til en modstrid.

Af de mere specielle problemer nævnes blot dette:
8. problem som omfatter den såkaldte Riemann hypotese om Riemann's Zeta-funktion, samt en række stadigvæk uafklarede påstande om primtal, f.eks. Goldbach's conjecture (omtalt i appendiks 2 om primtal).

Videre ind i 1900-tallet formulerede Hilbert sit program til sikring af matematikkens grundlag. Matematikken skulle baseres på en formalisme, dvs. i et formelt symbol-sprog. Formalismen skulle være fuldstændig, dvs. man skulle via denne formalisme kunne bevise alle sande teoremer. Matematikken skulle desuden kunne bevises at være konsistent (Hilbert's 2. problem fra år 1900). Og der skulle kunne findes en algoritme som kan afgøre for ethvert matematisk udsagn om det er sandt eller falskt.


Bertrand Russell

A.N.Whitehead

Hilbert satte gang i en udvikling, og interessen for at få hold på matematikkens grundlag intensiveredes. I perioden fra 1910-27 udgav de to engelske filosoffer og matematikere Alfred North Whitehead og Bertrand Russell værket "Principia Mathematica". Titlen er jo nok inspireret af Isaac Newton's værk "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica" (ofte blot benævnt "Principia") som udkom i 1687 og behandlede den klassiske fysiske mekanik på et matematisk grundlag.

I "Principia Mathematica" forsøgte Russell og Whitehead at give en samlet beskrivelse af matematikkens grundlag baseret på et så vidt muligt minimalt system af definitioner, slutningsregler og aksiomer. De præsenterede samtidigt matematik som en logisk disciplin ud fra synspunktet, at alle matematiske sandheder er logiske sandheder. Dette syn på matematik repræsenterer den matematiske skole som kaldes 'logicisme'.

En central målsætning i "Principia Mathematica" var at få hold på de paradokser som var blevet opdaget i forbindelse med Cantor's arbejde og som opfattedes som en trussel mod matematik som et "solidt bygningsværk". Det vender vi tilbage til i næste kapitel.

Værket blev i løbet af første tredjedel af 1900-tallet "overhalet" af andre arbejder med matematikkens grundlag og har, set som et rent matematisk værk, ikke nogen særlig betydning i dag. Men det må betragtes som et første gennemgribende forsøg på at at se på matematik som en menneskelig aktivitet i sammenhæng med filosofi og erkendelsesteori, og det satte yderligere skub i den løbende debat om, hvad der kan accepteres eller ikke accepteres som matematisk tankegang. Dette blev især fremprovokeret ved opdagelsen af paradokser i de matematiske begreber.

Se evt. mere om Euklids aksioms-system i appendiks 9A.
Se evt. mere om aksiomerne bag de naturlige tal i appendiks 9B.
Se evt. mere om udvidelsen af talbegrebet fra de naturlige tal N til Z og Q i appendiks 9C.

Kapitel 20. Paradokser, Zermelo-Fraenkel aksioms-systemet.

I hvilket vi præsenterer nogle af de paradokser matematikerne har kæmpet med og omtaler et "moderne" aksioms-system.

Et paradoks er en indre modsigelse frembragt af et tanke-system. I løbet af matematikkens udvikling, og især fra slutningen af 18-hundredetallet, førte opdagelsen af paradokser i teorien for mængder, og forsøgene på at opløse dem, til ny matematisk erkendelse.
Cantor var selv opmærksom på at hans teori om mængder kunne afføde paradokser. Men der kom især fokus på problemerne med Bertrand Russell's formulering i 1901 af et paradoks i mængdeteorien, 'Russell's paradoks'.

Cantor's defintion af hvad der i matematik kan opfattes som en mængde og som mængdens elementer kan nærmest kaldes en ikke-definition i den forstand at den tillader alt, herunder også at en mængde kan have sig selv som element.
Vi kan f.eks. tænke på mængden bestående af alle mulige begreber. Da denne mængde selv er et begreb, må den have sig selv som element.
De fleste mængder matematikere arbejder med har ikke denne egenskab.
F.eks. er mængden af alle mulige trekanter ikke selv en trekant. Men komplementær-mængden bestående af alt som ikke er en trekant, har - fordi den ikke selv er en trekant - sig selv som element.

Russel's paradoks kan formuleres således:
Vi opdeler alle mængder i to kategorier:

1. De mængder som ikke tilhører sig selv, kaldet 'normale'.
2. De mængder som tilhører sig selv, kaldet 'unormale'.

Vi definerer nu følgende mængde **A**:
Mængden **A** består af alle de normale mængder (kategori 1).
Nu må vi så spørge: Hvilken kategori tilhører så mængden **A**?
Antag at mængden **A** er normal, altså kategori 1. I så fald tilhører den, ifølge defintitionen af kategori 1, ikke sig selv. Men så må **A** tilhøre komplementær-mængden til **A**, og så er **A** unormal.
Antag at **A** er unormal, altså kategori 2. I så fald er **A** element i sig selv. Men da **A** netop består af alle normale mængder, må **A** så være normal.
Vi har altså en modstrid. Men da vi ikke har nogen klar antagelse på forhånd som vi kan afvise (som ved et indirekte bevis) har vi et paradoks i teorien om mængder.

Russel's paradoks omtales også i appendiks 9D i forbindelse med ZF-aksiomerne.

Hvis præsentationen af Russell's paradoks virker for teoretisk, kan det måske hjælpe at se på et mere praktisk eksempel, 'bibliotekarens paradoks':
På bibliotekerne findes der et katalog med en liste over alle bibliotekets trykte sager. I kataloget vælger nogle bibliotekarer at inkludere kataloget selv i sin liste, mens andre bibliotekarer ikke gør det. En over-bibliotekar for alle biblioteker beslutter sig nu for at lave to kataloger som tilsammen indeholder alle bibliotekers kataloger:

1. Katalog A, som indeholder en liste over alle de kataloger som ikke nævner sig selv i deres liste.
2. Katalog B, som indeholder en liste over alle de kataloger som nævner sig selv i deres liste.

Over-bibliotekarens problem er nu: I hvilket af de to kataloger, enten A eller B, skal katalog A stå i?
Læseren bedes venligst selv fuldføre argumentationen der fører til paradokset.
Kommer der også et paradoks ud af at spørge hvilket katalog katalog B skal stå i?

Der findes mange paradokser beslægtet med de her nævnte, flere af dem af typen 'semantiske paradokser', se appendiks 10, Paradokser.

Også som konsekvens af Cantor's teori om kardinaltal for potensmængder affødes et paradoks. Cantor's paradoks kan formuleres således:
Vi ser på mængden **U** hvis elementer består af alle mængder overhovedet. Nu ved vi, at der til enhver given mængde hører en potensmængde hvis elementer består af samtlige delmængder af den givne mængde. Også **U** har en potensmængde, **P(U)**. Ifølge Cantor's teorem (kapitel 17) er kardinaltallet for **P(U)** større end kardinaltallet for **U**:

$$|P(U)| > |U|$$

På den anden side gælder, at ethvert element i **P(U)** er en delmængde af **U**, og da **U** består af alle mængder, må **U** også indeholder denne delmængde som element. Så ethvert element i **P(U)** er også element i **U**. Men så er **P(U)** en delmængde af **U**: $P(U) \subseteq U$, og så gælder for kardinaltallene (kapitel 13):

$$|P(U)| \leqq |U|$$

og dette strider mod den foregående ulighed. Vi har et paradoks.

Der findes en anden version af Cantor's paradoks som viser, at samlingen af alle kardinaltal ikke kan opfattes som en mængde, se evt. appendiks 10, Paradokser.

De logiske og matematiske paradokser kan underminere hele den aksiomatisk opbyggede matematik.

Russell og Whitehead forsøgte derfor at komme disse paradokser til livs ved i "Principia Mathematica" at indføre en såkaldt 'type-teori' som lægger restriktioner for hvilke former for begreber og formuleringer som kan accepteres i en mængde-teori. F.eks. udelukkedes begreber som "mængder der tilhører sig selv" og "mængden af alle mængder". Desværre lykkedes det ikke at få denne type-teori opbygget konsistent.

Det blev et spørgsmål som matematikerne måtte kæmpe videre med; hvordan får man afgrænset de begreber som fører til paradokserne? Der er to elementer i paradokserne som især er under mistanke: At de mængder som indgår er for omfattende (f.eks. 'mængden af alle mængder'), og at der indgår selvrefererende udsagn (f.eks. 'mængder som tilhører sig selv', 'kataloger som i deres lister indeholder sig selv').

Ernst Zermelo

Abraham Fraenkel

Ernst Zermelo (tysk, 1871-1953) foreslog i 1908 en aksiomatisk mængde-teori, senere, i 1921, forbedret af Abraham Fraenkel (tysk-israelsk, 1891-1965). Selv om systemet blev yderligere udbedret, blandt andet af Thoralf Skolem (norsk, 1887-1963) og af John von Neumann (ungarsk-amerikansk, 1903-57) har systemet i dag fået betegnelsen 'ZF-aksiomerne'.

I det nok mest anerkendte system i dag, baseret på ZF-aksiomerne, sikres det at "for store samlinger" udelukkes som mængder, hvorimod man ikke udelukker enhver type af selvreferencer, idet dette vil være for stor en afgrænsning når man ønsker en stærk mængde-teori.
Også andre "særheder" ved mængde-begrebet bevares og spiller endda en central rolle i de moderne aksioms-systemer. At en mængdes elementer selv kan være mængder har læseren vist vænnet sig til i dette skrift, men i ZF-systemet er elementerne altid mængder. Mere sært opleves det nok, at man i det i dag anvendte aksioms-system bag de naturlige tal definerer ethvert naturligt tal som en mængde med den specielle egenskab, at ethvert element samtidig er en delmængde af mængden. Se evt. appendiks 9B.

Der er 9 ZF-aksiomer. Det 9. aksiom, 'udvalgs-aksiomet' ('axiom of choice') spiller i dette system lidt samme rolle som Euklids 5. postulat. Der har været kontroverser blandt matematikerne, om udvalgs-aksiomet faktisk er et teorem som kan bevises ud fra de øvrige 8 aksiomer, og om det overhovedet er

acceptabelt. Derfor har man ofte prøvet at undgå at bruge udvalgs-aksiomet i beviser, og derfor bruger man i dag den terminologi at 'ZF-aksiomerne' omfatter de første 8 aksiomer, mens man med betegnelsen 'ZFC-aksiomerne' også inkluderer det 9. aksiom ('axiom of **C**hoice').

Udvalgs-aksiomet, siger i én formulering således:
Givet en samling af mængder som alle er ikke-tomme. Så er det altid muligt at foretage at udvalg bestående af ét element fra hver mængde.

De fleste ikke-matematikere vil nok betragte udvalgs-aksiomet som så selvfølgeligt, at det slet ikke er nødvendigt at formulere som aksiom.
Vi kan illustrere aksiomet ved nogle eksempler:

- I en kommode med 10 skuffer findes i hver skuffe små kugler, mindst én kugle i hver. Uanset om der i skufferne er et endeligt eller et uendeligt antal kugler, kan et udvalg af én kugle fra hver skuffe foretages i et endeligt antal skridt. Udvalgs-aksiomet er overflødigt.
- Hvis kommoden har uendelig mange skuffer, kan vi ikke udvælge kuglerne i et endeligt antal skridt, her er udvalgs-aksiomet nødvendigt, og det siger at udvalget er muligt.
- Hvis der er uendelig mange skuffer, og vi ved at der i hver skuffe findes præcis én rød kugle, kan vi som algoritme til udvalg benytte: "udvælg den røde kugle fra hver skuffe" uden at benytte udvalgs-aksiomet.
- Hvis kuglerne er nummereret, men sådan at kuglerne i hver skuffe alle har forskellige numre, er udvalgs-aksiomet også overflødigt. For vi kan så som algoritme benytte at man i hver skuffe skal vælge kuglen med det laveste nummer.
- Dette sidstnævnte eksempel svarer til at sige:
  Hvis samlingen af mængder er ikke-tomme delmængder af de naturlige tal, kan udvalg foretages ved i hver delmængde at vælge det mindste tal.
- Hvis den uendelige samling af mængder er ikke-tomme delmængder af de reelle tal, kan man ikke generelt forvente at kunne finde en udvalgs-algoritme. Men trods dette tillader udvalgs-aksiomet os at antage, at udvalget kan lade sig gøre.

Det sidste eksempel siger altså at udvalgs-aksiomet tillader at vi kan gå ud fra eksistensen af et udvalg af elementer fra en vilkårlig uendelig samling af delmængder af de reelle tal, - og dette til trods for at ingen (indtil i dag) har kunnet påvise hvordan et sådant udvalg generelt kan foretages!

Det er på baggrund af dette forståeligt at matematikerne i deres beviser har forsøgt at undgå at bruge udvalgs-aksiomet. Men mange beviser bliver i så fald meget mere besværlige, og værre endnu er det, at hvis man ikke accepterer at bruge ZFC-systemet, men kun ZF-systemet, bliver store dele af beviserne og de tilhørende teoremer i den moderne matematik skåret væk.
Det er blandt andet dette som har medført, at matematikerne er blevet opdelt i forskellige 'skoler'. Det vender vi tilbage til i det følgende og sidste kapitel.

I appendiks 9D gives nogle eksempler på aksiomer i ZF-systemet. Desuden omtales at det såkaldte 'velordnings-teorem' kan vises at være ækvivalent med udvalgs-aksiomet på basis af de 8 ZF-aksiomer.

Som et kuriosum (oprindeligt vist brugt af Bertrand Russell, 1905) kan vi illustrere udvalgs-aksiomet med en samling af et uendelig antal par af støvler. Vi kan give en opskrift på et udvalg ved fra hvert par (hver delmængde) at vælge den venstre støvle. Dette forudsætter intet udvalgs-aksiom.
Men hvis vi har et uendeligt antal par af sokker (uskelnelige, uden markering af venstre/højre), så kan vi kun forudsætte at det er muligt at foretage et udvalg af en sok fra hvert par hvis vi må bruge udvalgs-aksiomet.

Kapitel 21. Matematiske "skoler" og matematikkens ufuldstændighed.

I hvilket vi kommer ind på, at matematikere ikke altid er enige, og vi afslutter med en overraskende erkendelse af matematikkens ufuldstændighed.

Mange opfatter nok matematik som en rent logisk disciplin som udvikler sig lineært igennem tiderne og med fuld konsensus mellem matematikerne. Men dette er blot én opfattelse af matematikkens "natur".
Især omkring århundrede-skiftet 1900, til dels fremprovokeret af Cantor's mængde-teori og Hilbert forsøg på at samle de matematiske discipliner, opstod forskellige matematiske 'skoler'. Her nævnes tre:

- *Logistikerne* (inspireret af Bertrand Russell, Alfred North Whitehead og Gottlob Frege),
- *Formalisterne* (inspireret primært af David Hilbert),
- *Platonisterne* (René Thom og Kurt Gödel).

Logistikerne mener at matematik er en del af logikken. Det er netop et centralpunkt i "Principia Mathematica" af Russel og Whitehead at vise, at matematikken kan opbygges på basis af den såkaldte symbolske logik. Et formål var at komme paradokserne i mængde-teorien til livs. Projektet havde stor betydning med henblik på at udvikle den symbolske logik, men først Frege og senere Russel selv måtte erkende, at det ikke er muligt at basere al matematik på ren logik. Logistikernes program har ingen særlig betydning i nutidens matematik.

Formalisterne opfatter groft sagt matematik som noget man opfinder. Aksiomerne er noget man vedtager at gå ud fra, og de afledte teoremer er blot konsekvenser af de vedtagne aksiomer. Matematikken hviler i sig selv, kræver ingen relation til eller bekræftelse i 'virkeligheden'. Ideelt set skal aksiomer, beviser og teoremer alt sammen beskrives som symbol-strenge løsrevet fra enhver form for 'mening'. Matematikken er en 'formel' videnskab, men dette forhindrer ikke at den kan anvendes som værktøj i de eksakte videnskaber, for eksempel i fysik og økonomi. De fleste matematikere i dag vil nok umiddelbart erklære sig som formalister (hvis de overhovedet vil erklære sig som noget).

Platonisterne opfatter matematik som abstrakte ideer som har selvstændig eksistens uafhængig af matematikere, uanset hvor i universet de findes. Disse ideer kan manifestere sig eller være repræsenteret af noget i 'virkeligheden'. For

eksempel kan ideen om den rette linje i geometrien (euklidisk eller ikke-euklidisk) repræsenteres ved at tegne en ret linje eller følge en lysstråle i rummet. Men det er ideen om den rette linje der er det reelle. Dette synspunkt kan sammenlignes med Platons 'ideer' (εἶδος) sådan som han forklarer det i sin berømte 'hule-allegori').
Som modsætning til formalisterne opfatter platonisterne matematik som noget der opdages. Men værktøjet til denne opdagelse er stadigvæk den formelle metode med aksiomer og afledte teoremer. Vi opdager for eksempel interessante egenskaber ved primtal (f.eks. Goldbach's påstand) og forsøger dernæst at bevise dem.
Kurt Gödel gennemhullede det formalistiske ideal ved at vise at matematikken er 'ufuldstændig' i den forstand at der findes matematiske sandheder som ikke kan bevises. (Lidt mere herom i det følgende).
I den ret nye teori om matematiske fraktaler gav 'Mandelbrot-mængden' et stærkt indtryk af, at man kan gå på opdagelse og finde 'sære' gentagelser af bestemte figurer i uendelig små udsnit af mængden.

En forholdsvis lille gruppe matematikere betegnes Intuitionisterne (inspireret af Leopold Kronecker og fulgt op af Henri Poincaré, Luitzen Brower og Herman Weyl).
Intuitionisterne mener at matematik må tage sit udgangspunkt i velfunderede fundamentale intuitive begreber. For eksempel er det at tælle (naturlige tal) et sådant. De er kritiske overfor at behandle uendelighed som et selvstændigt begreb (og dermed kritiske overfor Cantor's mængde-teori). De kræver at alle matematiske begreber kan kontrueres, derfor kaldes de også konstruktivister. Dermed anerkender de ikke eksistens-beviser, som ikke konkret peger på en konstruktion i et endeligt antal skridt af det man ønsker at vise eksisterer. For eksempel anerkendes ikke Euklids bevis for at der er uendelig mange primtal, for i dette bevis indgår ikke en konkret konstruktion af, hvordan man ud fra et givet primtal kan finde et primtal som er større. Euklids bevis er desuden baseret på et indirekte bevis, og denne bevis-metode accepteres heller ikke. Det indirekte bevis er baseret på den 'sædvanlige' logik hvor et udsagn er enten sandt eller falskt, dvs. der findes ingen 'middelvej' ('law of the excluded middle'). Som alternativ benytter de en særlig 'intuitiv logik'. Kritikere af intuitionisterne har som hovedargument at man dermed udelukker store dele af matematikken.

Hvor står de fleste matematikere i dag? Hvis man interviewer en 'typisk' arbejdende matematiker, vil vedkommende nok sige, at han eller hun er formalist. Men spørger man hvorfra ideerne til arbejdet hentes, vil matematikeren i sin iver for at forklare den spændende udvikling i arbejdet hurtigt røbe sig som platonist. - Bortset fra at de fleste matematikere nok vil sige at den diskussion ikke er vigtig for dem i deres daglige arbejde.
Det er typisk at færdige matematiske arbejder fremstår rent formalistiske, mens processen undervejs er baseret på en platonisk fornemmelse af at afdække en

'sandhed'. Og her spiller intuition (i bred forstand, ikke som 'intuitionist-skole') også en stor rolle.

Formalisternes vigtigste mål for grundlaget for matematikken var (jævnfør Hilbert):

- at vise at man internt i et matematisk system kan vise at aksiomerne er modsigelsesfrie,
- at forudsætte at ethvert matematisk udsagn i systemet kan bevises enten at være sandt eller falskt.

Disse mål fik et grundskud i 1930, da den østriske matematiker Kurt Gödel offentliggjorde sine 'ufuldstændigheds teoremer'. Gödel viste:

1. *I ethvert konsistent formelt system som er stærkt nok til at danne grundlag for teorien om tallene, findes sætninger som hverken kan bevises eller modbevises.*
   Eller varianten:
   I ethvert konsistent formelt system som er stærkt nok til at danne grundlag for teorien om tallene, findes sætninger som ikke kan bevises, men som alligevel er sande.
2. *Konsistensen (at systemet er modsigelsesfrit) af et formelt system som er stærkt nok til at danne grundlag for teorien om tallene, kan ikke bevises indenfor det formelle system.*

Kurt Gödel

At der findes matematiske sandheder som kan formuleres indenfor systemets 'syntaks', men som ikke kan bevises indenfor systemet, giver matematikken et stærkt platonisk præg. Gödels arbejde fik stor betydning for opfattelsen af matematik, men forhindrede ikke den videre rivende udvikling igennem 1900-tallet og frem til i dag af faget både internt og i anvendelse i bl.a. naturvidenskaberne, samfundsvidenskaberne, økonomi og databehandling.

Jævnfør kapitel 18 punkt 10 om udsagn og 'sandheder' om de naturlige tal.
Læs evt. mere om dette: https://torstenmeyer.dk/matforhvem0809/index.htm

Matematik som menneskelig aktivitet er en kendsgerning, men hvad matematik egentlig er for en underlig størrelse, er svært at blive klog på. Det kan ikke-matematikere og også matematikerne selv skrive under på.

Lad mig slutte dette skrift med et tankevækkende citat fra Davis, Philip J.; Hersh, Reuben, 1981: "The Mathematical Experience", kapitel 2, - en i øvrigt meget læseværdig bog *om* matematik.
Dette er en diskussion mellem den ideelle matematiker (IM) og en studerende:

Let's see how our ideal mathematician made out with a student who came to him with a strange question.

Student: Sir, what is a mathematical proof?
I.M.: You don't know *that?* What year are you in?
Student: Third-year graduate.
I.M.: Incredible! A proof is what you've been watching me do at the board three times a week for three years! That's what a proof is.
Student: Sorry, sir, I should have explained. I'm in philosophy, not math. I've never taken your course.
I.M.: Oh! Well, in that case you have taken *some* math, haven't you? You know the proof of the fundamental theorem of calculus - or the fundamental theorem of algebra?
Student: I've seen arguments in geometry and algebra and calculus that were called proofs. What I'm asking you for isn't *examples* of proofs, it's a definition of proof. Otherwise, how can I tell what examples are correct?
I.M.: Well, this whole thing was cleared up by the logician Tarski, I guess, and some others, maybe Russell or Peano. Anyhow, what you do is, you write down the axioms of your theory in a formal language with a given list of symbols or alphabet. Then you write down the hypothesis of your theorem in the same symbolism. Then you show that you can transform the hypothesis step by step, using the rules of logic, till you get the conclusion. (*) That's a proof.
Student: Really? That's amazing! I've taken elementary and advanced calculus, basic algebra, and topology, and I've never seen that done.
I.M.: Oh, of course no one ever really *does* it. It would take forever! You just show that you could do it, that's sufficient.
Student: But even that doesn't sound like what was done in my courses and textbooks. So mathematicians don't really do proofs, after all.
I.M.: Of course we do! If a theorem isn't proved, it's nothing.
Student: Then what is a proof? If it's this thing with a formal language and transforming formulas, nobody ever proves anything. Do you have to know all about formal languages and formal logic before you can do a mathematical proof?
I.M.: Of course not! The less you know, the better. That stuff is all abstract nonsense anyway.
Student:Then really what *is* a proof?
I.M.: Well, it's an argument that convinces someone who knows the subject.
Student: Someone who knows the subject? Then the definition of proof is subjective; it depends on particular persons. Before I can decide if something is a proof, I have to decide who the experts are. What does that have to do with proving things?
I.M.: No, no. There's nothing subjective about it! Everybody knows what a proof is. Just read some books, take courses from a competent mathematician, and you'll catch on.
Student: Are you sure?

I.M.: Well - it is possible that you won't, if you don't have any aptitude for it. That can happen, too.
Student: Then *you* decide what a proof is, and if I don't learn to decide in the same way, you decide I don't have any aptitude.
I.M.: If not me, then who?

(*) Der burde måske nok have stået (TM's kommentar):
"Then you show that you can transform the axioms and former theorems step by step, using the rules of logic, till you get the conclusion."