Appendices og litteratur til
Tal og uendelige mængder

Indholdsfortegnelse

Appen-diks	Side	Indhold
1	2	Parringsfunktion *Henvist fra kapitel 1, Hilberts Hotel*
2	4	Primtal. *Henvist fra kapitel 3. Primtal.*
3	6	Egenskab ved en uendelig mængde *Dette appendiks har sammenhæng med flere kapitler, bl.a. kapitel 4 og 18 om karakteristik af uendelige mængder, samt kapitel 11 om Cantor's diagonal-bevis for at de reelle tal ikke er nummerable.*
4	8	Decimalbrøker for rationelle og irrationelle tal. *Henvist fra kapitel 7. De rationelle tal.*
5	11	Inkommensurable linjestykker, geometrisk bevis *Henvist fra kapitel 9, De irrationelle tal.*
6A-D	14	Cantor–Schröder–Bernstein teoremet *Henvist fra kapitel 13, Større eller mindre kardinaltal.*
7	31	Talsystemer *Henvist fra kapitel 16, Sammenligning af kardinaltallene* ***|P(N)| og*** $\aleph$.
8	33	Udbedring af fejl i beviset for **|P(N)|** = $\aleph$ *Henvist fra kapitel 16, Sammenligning af kardinaltallene* ***|P(N)| og*** $\aleph$.
9 A-D	34	Mere om matematikkens aksiomer. *Henvist fra kapitel 19 og 20, om aksiomer og paradokser.*
10	44	Paradokser. *Henvist fra kapitel 18 og 20.*
11	46	Litteratur

Appendiks 1. Parringsfunktion

Henvist fra kapitel 1, Hilberts Hotel

En parringsfunktion laver en 1-1 korrespondance mellem et par bestående af 2 hele positive tal og et enkelt helt positivt tal ("tælle-tallet").

Formlen for værelse-tildeling som giver værelsenummer ud fra busnummer b og passagernummer m så således ud:

$$\text{værelse nr.} = v = \tfrac{1}{2}(b+m-2)(b+m-1) + m$$

Dette giver en 1-1 korrespondance mellem talparret b og m og det enkelte tal v, hvilket betyder at der til hvert talpar, b og m, svarer præcis ét enkelt tal v, og omvendt til hvert tal v svarer præcis ét talpar b og m.

Værelse nr. 1, 2, 3, ... følger ruten i diagrammet:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1/1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & \cdots \\
\downarrow\nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
2/1 & 2/2 & 2/3 & 2/4 & 2/5 & 2/6 & 2/7 & 2/8 & \cdots \\
\nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
3/1 & 3/2 & 3/3 & 3/4 & 3/5 & 3/6 & 3/7 & 3/8 & \cdots \\
\nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
4/1 & 4/2 & 4/3 & 4/4 & 4/5 & 4/6 & 4/7 & 4/8 & \cdots \\
\nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
5/1 & 5/2 & 5/3 & 5/4 & 5/5 & 5/6 & 5/7 & 5/8 & \cdots \\
\nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
6/1 & 6/2 & 6/3 & 6/4 & 6/5 & 6/6 & 6/7 & 6/8 & \cdots \\
\nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
7/1 & 7/2 & 7/3 & 7/4 & 7/5 & 7/6 & 7/7 & 7/8 & \cdots \\
\nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
8/1 & 8/2 & 8/3 & 8/4 & 8/5 & 8/6 & 8/7 & 8/8 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

hvor hvert punkt er skrevet som b/m (som her ikke betyder division).

Hvis læseren har lyst til en lille udfordring, så prøv at argumentere for at formlen virker som "tæller" af værelserne undervejs på ruten i diagrammet.
Tips 1: Bemærk at summen b+m er konstant i enhver af diagonalerne.
Tips 2: Bemærk at m "tæller op igennem" hver diagonal.
Tips 3: Formlen: 1+2+...+k = ½ k (k+1) viser hvordan en ny diagonal startes.
Den parringsfunktion vi her har benyttet, er en nær slægtning til den såkaldte Cantor Pairing Function som ser således ud:

$$p = \frac{1}{2} (k_1+k_2)(k_1+k_2+1) + k_2$$

I modsætning til vores brug antager k_1, k_2 og p her værdierne 0, 1, 2, ...
Se evt. https://en.wikipedia.org/wiki/Pairing_function
Der findes mange andre parringsfunktions end de her nævnte.

Appendiks 2. Primtal.

Henvist fra kapitel 3. Primtal.

Som nævnt i starten af kapitel 3 kan vi checke om et naturligt tal er et primtal eller et sammensat tal ved blot at undersøge, om primtallene fra 2 op til det største primtal som er mindre end kvadratroden af n, går op i n, og går ingen af disse tal op i n, er n et primtal.

F.eks. er 127 et primtal. Hverken 2, 3, 5, 7 eller 11 går op i det. Da $11^2 = 121$ og $13^2 = 169$, ligger kvadratroden af 127 mellem 11 og 13, og derfor behøver vi ikke at checke om primtal større end 11 går op i 127. For skulle der være en faktor i 127 som er større end kvadratroden af 127, måtte der også være en faktor mindre end kvadratroden af 127.
F.eks. for det sammensatte tal 143, hvis kvadratrod også ligger mellem 11 og 13, finder vi at primtallet 11 går op i det, og primfaktor-opløsningen bliver 11 * 13.

En anden måde at finde primtal på er ved at benytte 'Eratosthenes si', hvor man starter fra bunden med 2, derefter udelukker alle lige tal, dernæst videre til 3 som derefter udelukker alle tal 3 går op i, denæst springes 4 over, fordi det allerede er udelukket, og videre til 5, etc.
Se evt. mere her: https://en.wikipedia.org/wiki/Sieve_of_Eratosthenes

Entydigheden af primfaktor-opløsningen kaldes 'talteoriens fundamentale teorem' eller 'aritmetikkens fundamentalsætning'. Den garanterer at f.eks. $120 = 2^3 * 3 * 5$ kun har denne primfaktor-opløsning (bortset fra faktorernes orden). Det kan lyde trivielt, men er det faktisk ikke, beviset for talteoriens fundamentale teorem er ikke helt ligetil.

Matematikeren Harald Bohr (Niels Bohrs bror) gav i et foredrag i 1930 et morsomt eksempel på en alternativ talmængde som ikke har den egenskab, at primfaktor-opløsningen er entydig. Vi forestiller os at vi som tal kun til rådighed har de naturlige tal som ved division med 4 giver resten 1, dvs. tallene 1, 5, 9, 13, 17, 21, ... De kan alle skrives på formen 4n+1 hvor n er et naturligt tal. Produktet af to sådanne tal har samme egenskab idet
(4n+1)(4m+1) = 16nm+4n+4m+1 og også dette tal giver ved division med 4 resten 1.
Så i den alternative talmængde, kaldet **A**, giver produktet af to tal et nyt tal i **A**.
'Primtal' for den alternative talmængde defineres på samme måde som for **N**.
Alle primtal i **N** som samtidig er **A**-tal, vil også være 'primtal' i **A**. Men **A** vil desuden indeholde 'primtal' som ikke er primtal i **N**, nemlig de tal i **A** hvis primtals-opløsning i **N** indeholder en eller flere faktorer som ikke tilhører **A**.
De første 'primtal' i **A** bliver: 5, 9, 13, 17, 21, 29, 33, 37, 39, 41, 43, 47, 49 ...
F.eks. er 13 et 'primtal' i **A** fordi 13 også er primtal i **N**. 21 er 'primtal' i **A**; ganske vist er i **N** 21 = 3*7, men hverken 3 eller 7 tilhører **A**. Tilsvarende er 39 = 3 * 13 et 'primtal' i **A** fordi 3 ikke tilhører **A**. Og 49 = 7 * 7 er et 'primtal' da 7 ikke tilhører **A**.

I den alternative talmængde **A** vil 'ikke-primtal' ligesom i **N** være 'sammensatte tal', altså tal som har en 'primtals-opløsning' i form af produkt af 'primtal'. Men i **A** er 'primtals-opløsningen' ikke entydig. F.eks. er det sammensatte tal 441 både lig med 21*21 og lig med 9*49.

Den matematiske teori om primtal er omfattende. Der er i tidens løb blevet fundet mange interessante og dybtliggende teoremer. Men der findes også en del påstande ('conjectures') som stadigvæk henligger som hverken beviste eller ubeviste. Det er f.eks. ikke endnu lykkedes at lave en formel som præcist genererer primtallene i rækkefølge. Og det er hverken bevist at en sådan formel eksisterer eller ikke eksisterer.

Tilsvarende har man ikke til dato kunnet finde en præcis formel for antallet af primtal under en vis grænse. Generelt aftager tætheden af primtal set over store intervaller op igennem talrækken, men de fordeler sig meget ujævnt. Der findes f.eks. langt oppe i talrækken 'tvillingeprimtal', dvs. to primtal med differensen 2, f.eks. 29 og 31, og det kan vises at der findes vilkårligt store mellemrum mellem to primtal bestående af lutter sammensatte tal. Det er dog lykkedes at finde formler som giver et tilnærmet udtryk for hvor mange primtal der findes op til et givet tal n. Disse formler nærmer sig asymptotisk til det korrekte antal, dvs. at deres præcision øges når værdien af n øges.
Se evt. https://en.wikipedia.org/wiki/Prime_number_theorem.

De før nævnte tvillinge-primtal antages at findes vilkårligt oppe i talrækken, men heller ikke det er indtil dato bevist eller modbevist.

Selv en tilsyneladende så enkel påstand som 'Goldbach's conjecture' er indtil dato uafklaret. Påstanden siger:
Ethvert lige tal større end 2 kan på mindst én måde skrives som en sum af to primtal.
Eksempler: 4 = 2 + 2. 6 = 3 + 3. 8 = 3 + 5. 10 = 3 + 7 = 5 + 5.
Goldbach's conjecture er via computer checket at gælde for lige tal op til aktuelt ca. $4*10^{18}$ (4 med 18 nuller efter), men det er indtil dato hverken lykkedes at bevise eller modbevise den.

Primtals-teorien er et område af talteorien hvor det er nemt at påvise den praktiske nytte (hvis læseren skulle have behov for det). Den danner grundlag for den kryptering som vi til daglig bruger (uden at behøve at vide det) når vi f.eks. logger på med Nem-Id. "Bag skærmen" kører 'public key cryptography', hvis mest kendte udgave er 'RSA-kryptering'.
Se evt. mere: https://en.wikipedia.org/wiki/Prime_number

Appendiks 3. Egenskab ved en uendelig mængde

Dette appendiks har sammenhæng med flere kapitler, bl.a. kapitel 4 og 18 om karakteristik af uendelige mængder, samt kapitel 11 om Cantor's diagonal-bevis for at de reelle tal ikke er nummerable.

I kapitel 4 og 18 omtales at en typisk egenskab ved en uendelig mængde er at der findes (mindst) en 1-1 korrespondance mellem en ægte delmængde af mængden og mængden selv. Eller mere præcist:

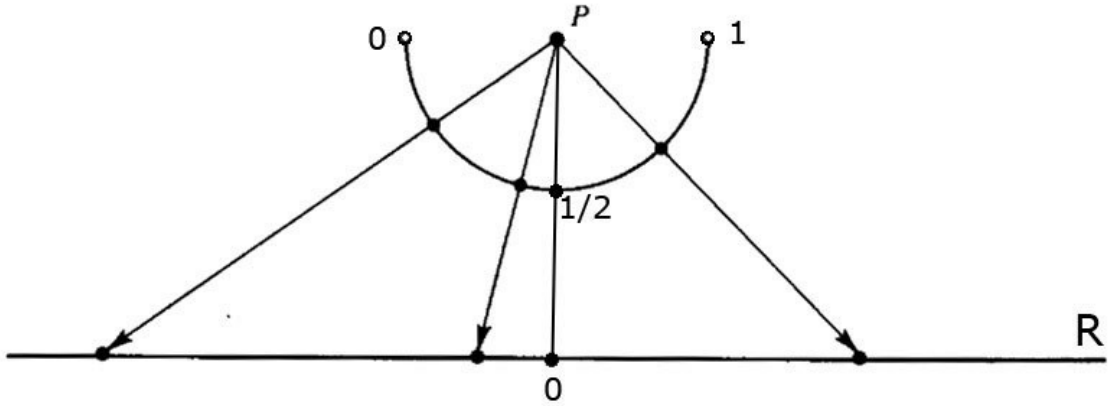
En mængde er uendelig hvis, og kun hvis, det er muligt at finde en ægte delmængde af mængden, sådan at der kan etableres en 1-1 korrespondance mellem den ægte delmængde og mængden selv.

Som eksempel så vi på visse ægte delmængder af **N**.
Også for den uendelige mængde af reelle tal **R** (dvs. alle tal som kan skrives som endelige eller uendelige decimaltal) findes sådanne 1-1 korrespondancer.

Vi kan f.eks. illustrere at der findes en 1-1 korrespondance mellem de reelle tal mellem 0 og 1, 0 og 1 ikke medregnet, og alle reelle tal R.

De reelle tal mellem 0 og 1, 0 og 1 ikke medregnet, kaldes 'det åbne interval' fra 0 til 1 og skrives]0,1[. Dette i modsætning til 'det lukkede interval' fra 0 til 1 som skrives [0,1], og hvor 0 og 1 medregnes.

1-1 korrespondancen etableres ved at vi forestiller os, at det åbne interval]0,1[bøjes op i en halvcirkel og at tallene i intervallet projekteres via linjer fra cirklens centrum P ned på den reelle talakse. Se illlustration nedenfor.



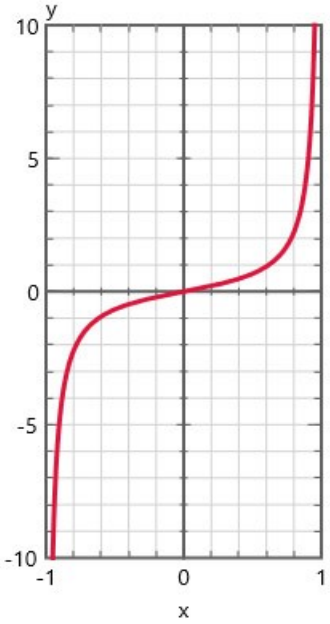
En åben cirkel markerer at et punkt ikke er med, en lukket cirkel at punktet er med.

En bevægelse på halvcirklen fra 0 til 1 (0 og 1 ikke med) svarer til at endepunktet for linjen på den reelle talakse går fra minus til plus uendelig, skrevet med uendeligheds-symbolet: (fra -∞ til ∞).

Dette benyttes i kapitel 11, hvor Cantor's diagonal-bevis for at de reelle tal i intervallet]0,1[ikke er nummerable blev udvidet til at gælde for alle de reelle tal.

Som et andet eksempel kan vi ved valg af en passende reel monotont voksende funktion etablere en 1-1 korrespondance mellem de reelle tal mellem det åbne interval]-1,1[og hele **R**.
Et eksempel på dette er denne funktion med tilhørende graf:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{(\mathbf{1} - \mathbf{x}^2)}$$



*Når x nærmer sig -1 fra højre eller +1 fra venstre går y henholdsvis mod minus uendelig eller plus uendelig. Der er 1-1 korrespondance mellem det åbne interval fra -1 til 1 og hele **R**.*

Måske lidt overraskende er det også muligt at etablere en 1-1 korrespondance mellem det åbne interval]-1,1[og det lukkede interval [-1,1], og dermed også mellem det lukkede interval [-1,1] og hele R. Dette omtales i appendiks 6c.

Appendiks 4. Decimalbrøker for rationelle og irrationelle tal.

Henvist fra kapitel 7, De rationelle tal, og kapitel 16, Sammenligning af kardinaltallene ***|P(N)| og*** $\aleph$.

Enhver endelig decimalbrøk repræsenterer et rationelt tal.

Eksempel:

$$3{,}7913 = \frac{37913}{10000}$$

Enhver decimalbrøk som er periodisk fra en vis decimal at regne repræsenterer et rationelt tal.

Eksempel: x = 5,**3**333 ...
(Perioden som gentages markeres med fede typer).
For at indse dette laver vi nogle omskrivninger for at finde det rationelle tal som uforkortelig brøk med hel tæller og nævner. Vi ganger med 10 på begge sider af lighedstegnet (svarende til at perioden er på 1 decimal):

10x = 53,**3**333 ...

Ved subtraktion - vi trækker første ligning fra sidste - fås:

$$10x - x = 53{,}\mathbf{3}33\ldots - 5{,}\mathbf{3}33\ldots = 53 - 5 \quad \Leftrightarrow \quad 9x = 48 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$$

Eksempel: x = 0,4**21**2121 ...
Vi ganger med 10 på begge sider (for at komme hen til starten af perioden):

10x = 4,212121 ...

Vi ganger med 100 på begge sider (fordi perioden er på 2 decimaler):

1000 x = 421,212121 ...

Og ved subtraktion:

$$1000x - 10x = 421 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad 990x = 417 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{417}{990} = \frac{139}{330}$$

Prøv at omskrive disse decimalbrøker til brøker med hel tæller og nævner:
0,**09**0909 ...; 0,**428571**428571 ...; 0,91**6**66 ...; 123,57**18**18 ...; 2,4**9**99 ...

Omvendt gælder:
Ethvert rationelt tal kan skrives som en decimalbrøk som enten er endelig eller periodisk fra en vis decimal at regne.

(Da en endelig decimalbrøk kan ses som periodisk med gentagne 0'er i enden, kan vi blot sige at ethvert rationelt tal kan skrives som en periodisk decimalbrøk fra en vis decimal.)

Eksempel: $\frac{1}{3}$ = 0,**3**33 ...

For at finde decimalbrøken kan vi benytte en af den sædvanlige divisions-algoritme. Ved division med 3 er der mulighed for at vi kan få 3 rester: 0, 1 eller 2. Da 10 / 3 = 3 rest 1, gentages divisionen 10 / 3 med rest 1, dvs. vi får en periode med 1 decimal, tallet 3.

Generelt ved division med et helt tal n er der n mulige rester, nemlig 0, 1, ... , n-1. Hvis resten bliver 0 på et vist trin i divisions-algoritmen, bliver decimalbrøken endelig. Og ellers er der kun n-1 rester til rådighed, så derfor må der fra et vist trin i divisionen ske gentagelse. Perioden fra et vist trin kan altså blive fra 1 til n-1 decimaler.

Eksempel: $\frac{1}{11}$ = 0,**09**09 ...

Divisionen går aldrig op, så der er mulighed for 10 forskellige rester. Men kun 2 af dem forekommer i løbet af divisionen. Divisionen forløber således:

decimal 0 med rest 10
decimal 9 med rest 1
decimal 0 med rest 10
decimal 9 med rest 1
...

Eksempel: $\frac{1}{7}$ = 0,**142857**142857 ...

Divisionen går aldrig op og alle rester ved division med 7 forekommer:

decimal 1 med rest 3
decimal 4 med rest 2
decimal 2 med rest 6
decimal 8 med rest 4
decimal 5 med rest 5
decimal 7 med rest 1
decimal 1 med rest 3
...

Eksempel: $\frac{139}{330}$ = 0,4**21**21

Divisionen går aldrig op, rester og decimaler kommer således:

decimal 4 med rest 70
decimal 2 med rest 40
decimal 1 med rest 70
decimal 2 med rest 40

decimal 1 med rest 70

...

Find de periodiske decimalbrøker til disse brøker (lidt tal-mystik):
7913/9999 = ? 137.174.210/1.111.111.111 = ?
Hvis du her falder for fristelsen til at bruge regnemaskine, er det tilgiveligt, men husk at regnemaskinen har et begrænset antal betydende cifre.
(En regnemaskine app til Android, 'Hiper Calc', kan vise op til 32 betydende cifre samt finde perioder i decimalbrøker).

Vi kan af det foregående konkludere:

Talllet er rationelt ⇔ tallet kan skrives som decimalbrøk som har et endeligt antal decimaler eller som er periodisk fra en vis decimal at regne.

Vi kan så også konkludere:
Enhver decimalbrøk som hverken er endelig eller periodisk fra en vis decimal at regne, repræsenterer et ikke-rationelt, kaldet irrationelt, tal.

Her kommer desuden en lidt overraskende ting om tals repræsentation ved decimalbrøker:
Alle rationelle tal med endelig decimalbrøk kan skrives på to måder som decimalbrøk.
F.eks. kan tallet 5/2 skrives som:

2,5 = 2,4**9**99 ...

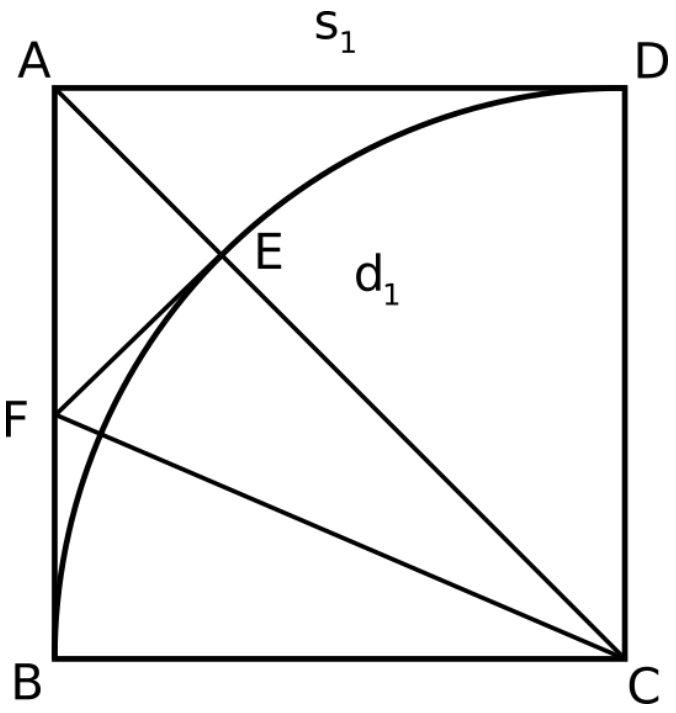
Ved brug af metoden tidligere nævnt i dette appendiks til omskrivning af periodiske decimalbrøker, kan vi vise at 2,4**9**99 ... = 2,5.
Tilsvarende fås at f.eks. 1,**9**99 ... = 2, og at 9,124**9**99 ... = 9,125

Repræsentationen af reelle tal (alle rationelle og irrationelle tal) ved decimalbrøker er altså ikke altid entydig.
Dette får betydning i argumentationen i kapitel 16.

Appendiks 5. Inkommensurable linjestykker, geometrisk bevis

Henvist fra kapitel 9, De irrationelle tal.

Begrebet kommensurable og inkommensurable linjestykker behandles i "Euklid's elementer", bog 10 (X). Allerede pythagoræerne kan have brugt et argument svarende til det følgende til at vise, at siden og diagonalen i et kvadrat er inkommensurable.



ABCD er et kvadrat med side-længde s_1 og diagonal-længde d_1.
AB = BC = CD = DA = s_1. AC = BD = d_1.

Vi benytter et indirekte bevis og antager at side og diagonal i kvadratet er kommensurable. Det betyder at der findes et (passende lille) linjestykke hvis længde er det positive hele tal μ (græske bogstav 'my'), således at s_1/μ og d_1/μ bliver hele tal. Vi kan så skrive:

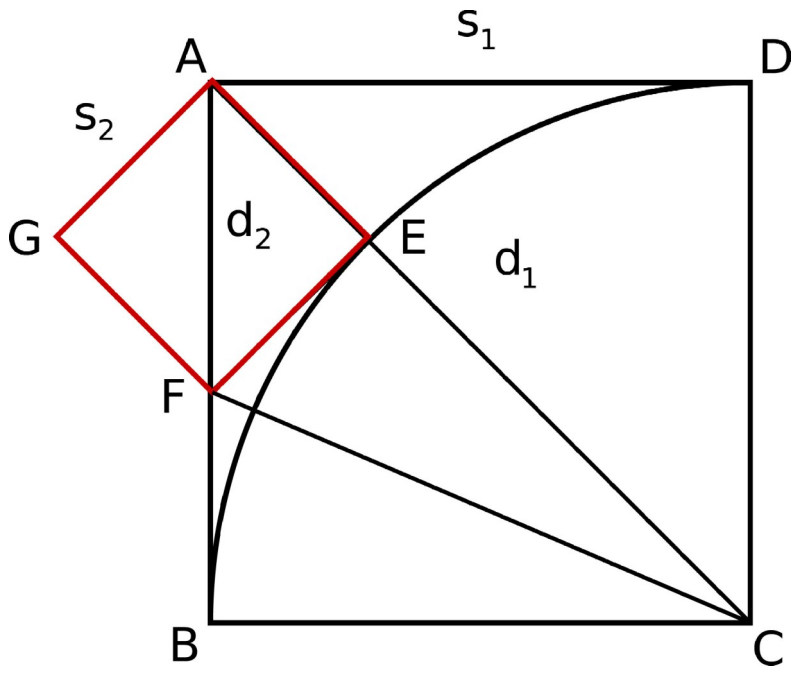
$s_1 = m_1 \mu$ og $d_1 = n_1 \mu$ hvor m_1 og n_1 er passende hele positive tal

Vi tegner nu en cirkelbue i kvadratet med centrum i C og radius s_1. Cirklen skærer diagonalen AC i punktet E. Vi har så at CE = s_1.

På siden AB vælger vi et punkt F således at EF står vinkelret på AC (EF er så tangent til cirklen).

Vi benytter nu at de spidse vinkler i en ligebenet retvinklet trekant er 45°.
De to trekanter ABC og AEF er begge retvinklede og har vinklen ved A fælles, og den er 45° da trekant ABC er ligebenet. Trekant AEF må så også være en ligebenet trekant. (Vinkelsummen i begge trekanter er 180° = 90° + 45° + 45°).
Derfor er EF = AE.

De to trekanter CEF og CBF er begge retvinklede, og de har begge en katete som er radius i cirklen og derfor har længden s_1. De har hypotenusen CF fælles, derfor er de konkruente. De resterende kateter må så også være lige store.
Derfor er FB = EF.
Samlet har vi nu: FB = EF = AE, og desuden har vi at AE = AC - CE.



Når vi spejler trekant AEF omkring linjen AF, får vi et punkt G således at AEFG er et kvadrat. Vi betegner siden i dette kvadrat s_2 og diagonalen d_2.

Vi vil nu udtrykke det nye kvadrats side og diagonal ved det gamle kvadrats.
Fra det foregående har vi at $AC = d_1$ og $CE = s_1$ samt at $AB = s_1$ og $FB = AE = AC - CE = d_1 - s_1$. Vi kan så udtrykke s_2 og d_2 ved s_1 og d_1:

$$s_2 = AE = AC - CE = d_1 - s_1$$
$$d_2 = AB - FB = s_1 - (d_1 - s_1) = s_1 - d_1 + s_1 = 2s_1 - d_1$$

Vi indsætter nu vores antagelse: $s_1 = m_1\,\mu$ og $d_1 = n_1\,\mu$, og får at s_2 og d_2 også er indbyrdes kommensurable, idet:

$$s_2 = n_1 \mu - m_1 \mu = (n_1 - m_1) \mu = m_2 \mu$$
$$d_2 = 2 m_1 \mu - n_1 \mu = (2 m_1 - n_1)\mu = n_2 \mu$$

hvor vi definerer tallene m_2 og n_2 ved:

$$m_2 = n_1 - m_1 \quad \text{og} \quad n_2 = 2 m_1 - n_1$$

Lad os se på disse nye tal m_2 og n_2. De er hele tal, og de er positive, da alle tallene s_2, d_2 og μ er længder af linjestykker.
Desuden at $d_1 > s_1$ fordi diagonalen er længere end siden i et kvadrat. Vi får så:

$$d_1 > s_1 \;\Rightarrow\; n_1 \mu > m_1 \mu \;\Rightarrow\; n_1 > m_1 \;\Rightarrow\; 2n_1 > 2m_1 \;\Rightarrow\; n_1 > 2m_1 - n_1 \;\Rightarrow\; n_1 > n_2$$

Vi har altså at $n_1 > n_2$, eller i ord, at n_2 er mindre end n_1.

Vi kan nu gentage hele proceduren med det nye kvadrat AEFG og frembringe et kvadrat med sidelængde og diagonal, også indbyrdes kommensurable, givet ved:

$$s_3 = m_3 \mu \quad \text{og} \quad d_3 = n_3 \mu$$

hvor m_3 og n_3 er hele positive tal, og hvor $n_2 > n_3$, dvs. n_3 er mindre end n_2.
Dette kan fortsættes i det uendelige, og vi får så en uendelig række af aftagende hele postive tal:

$$n_1 > n_2 > n_3 > n_4 \ldots$$

Men en sådan uendelig række er umulig, da hele positive tal har en nedre grænse, tallet 1.

Vi er så nået en modstrid. Vores antagelse, at side og diagonal i et kvadrat er kommensurable, er forkert, der må så gælde det modsatte:
Side og diagonal i et kvadrat er inkommensurable linjestykker.

De mere matematisk sindede kan måske fornemme, at ræsonnementet i dette bevis har en parallel i 'Euklids algoritme', som benyttes til for to givne hele positive tal at bestemme største fælles divisor. Euklids algoritme afsluttes altid i et endeligt antal skridt, netop fordi udgangspunktet er hele positive tal svarende til længder af kommensurable linjestykker.
Se evt. https://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_algorithm

Euklid (omkring år 300 før Kristus) samlede oldtidens matematiske viden i sine "Elementer", et værk på 13 bind og på over 1000 sider. Euklids elementer blev brugt i matematik-undervisning frem til starten af 1900-tallet.

Appendiks 6A. Cantor–Schröder–Bernstein teoremet

Henvist fra kapitel 13, Større eller mindre kardinaltal.

Dette ret omfattende appendiks, 6A-6D, afspejler min fascination af dette (kun) tilsyneladende ret selvindlysende teorem, af metoderne til at bevise det samt af de forskellige konsekvenser.

Vi repeterer definitionerne af det svage og det stærke ulighedstegn:

Definition (det 'svage ulighedstegn'):
*Mængden **A** er mindre mægtig eller lige så mægtig som mængden **B**,*
*hvis der findes en 1-1 korrespondance mellem **A** og en delmængde af **B**.*
*Vi siger at kardinaltallet for **A** er "mindre end eller lig med" kardinaltallet for **B**,*
og vi skriver med ulighedstegnet ≦:

$$|A| \leqq |B|$$

Definition (det 'stærke ulighedstegn'):
*Mængden **A** er mindre mægtig end mængden **B**, hvis der findes en 1-1 korrespondance mellem **A** og en ægte delmængde af **B**, men samtidig ikke findes en 1-1 korrespondance mellem **B** og en delmængde af **A**.*
*Vi siger at kardinaltallet for **A** er mindre end kardinaltallet for **B**, og vi skriver med ulighedtegnet <:*

$$|A| < |B|$$

Selv om vi bruger formuleringen "mindre mægtig eller lige så mægtig" eller "mindre end eller lig med" i forbindelse med definitionen af det svage ulighedstegn, kan vi ikke uden videre fortolke symbolet ≦ for kardinaltal på samme måde som "mindre end eller lig med" for de reelle tal. I første omgang må vi betragte '≦' blot som et symbol og kun gå ud fra definitionens betingelser om givne 1-1 korrespondancer.

For naturlige, reelle og rationelle tal p og q hvor ≦ kan fortolkes som "mindre end eller lig med", gælder denne regel:

$$p \leqq q \quad \text{og} \quad q \leqq p \quad \Rightarrow \quad p = q$$

Cantor-Schröder-Bernstein teoremet (CSB teoremet) for kardinaltal siger netop at der også for kardinaltal tilsvarende gælder:

$$|A| \leqq |B| \quad \textit{og} \quad |B| \leqq |A| \quad \Rightarrow \quad |A| = |B|$$

Formuleret i ord siger CSB teoremet:
*Hvis der for to mængder **A** og **B** gælder, at der findes en 1-1 korrespondance mellem **A** og en ægte delmængde af **B**, samt at der også findes en 1-1 korrespondance mellem **B** og en ægte delmængde af **A**, så gælder at der kan findes en 1-1 korrespondance mellem hele **A** og hele **B**, dvs. de to mængder **A** og **B** er lige mægtige.*

I dette appendiks 6A diskuterer vi hvilke konsekvenser CSB-teoremet har for opfattelsen af uligheds-tegnende. I appendiks 6B beviser vi teoremet.

CBS-teoremet sikrer at det svage ulighedstegn for kardinaltal har samme egenskab som det svage ulighedstegn for de reelle tal, nemlig at
|A| ≦ |B| er ækvivalent med at "**|A|** < **|B|** *eller* **|A|** = **|B|**".

Vi beviser dette ved først at vise at det stærke ulighedstegn **|A|** < **|B|** er ækvivalent med "**|A| ≦ |B|** *og* **|A| ≠ |B|**" - også svarende til hvad der gælder for reelle tal.

Ved definitionen af det svage ulighedstegn kan der forekomme to tilfælde:
(1) Der gælder **|A|** = **|B|** hvis delmængden af **B** trivielt er hele **B**, samt i visse tilfælde hvor det drejer sig om en ægte delmængde af **B**.
(2) Der gælder *ikke* **|A|** = **|B|** (kan skrives **|A| ≠ |B|**).

Definitionen af det stærke ulighedstegn indeholder som det ses to ekstra krav:
For det første det trivielle, at det skal være en ægte delmængde af **B** (for ellers er **A** og **B** lige mægtige, og der gælder **|A|** = **|B|**).
For det andet at der ikke må findes en 1-1 korrespondance mellem **B** og en delmængde af **A** (hverken ægte eller hele **A**).

Tilfælde (2) for det svage ulighedstegn er ækvivalent med det stærke ulighedstegn, **|A|** < **|B|** hvilket følger af CSB teoremet ses således:

Vi antager at der gælder **|A| ≦ |B|** og at vi har tilfælde (2), altså at **|A| ≠ |B|**.
Vi ved så at der findes en 1-1 korrespondance mellem **A** og en delmængde af **B**. Vi fortsætter nu med et indirekte bevis:
Hvis vi nu desuden antager at der findes en 1-1 korrespondance mellem **B** og en delmængde af **A**, så har vi både **|A| ≦ |B|** og **|B| ≦ |A|**.
Af CSB teoremet følger så at **|A|** = **|B|**.
Men dette er i modstrid med at vi i tilfælde 2 har **|A| ≠ |B|**.

Altså fører sidstnævnte antagelse til en modstrid, dvs. at der *ikke* findes en 1-1 korrespondance mellem **B** og en delmængde af **A**.
Men så gælder **|A|** < **|B|** ifølge definitionen af det stærke ulighedstegn.

Omvendt antager vi at **|A|** < **|B|**.
Vi ved så at der findes en 1-1 korrespondance mellem **A** og en ægte delmængde af **B**, og at der ikke findes en 1-1 korrespondance mellem **B** og en delmængde af **A**.
Betingelsen i defintionen af **|A|** ≦ **|B|** er så opfyldt.
Hvis vi nu desuden i et indirekte bevis antager at **|A|** = **|B|**, må der jo findes en 1-1 korrespondance mellem **B** og en delmængde af **A** - nemlig **A** selv. Men dette strider imod betingelsen i definitionen af **|A|** < **|B|**. Sidstnævnte antagelse fører altså til en modstrid, dvs. der gælder *ikke* at **|A|** = **|B|**, men så må der gælde **|A|** ≠ **|B|**, dvs. vi er i tilfælde (2) af det svage ulighedstegn.
(Her blev CSB teoremet ikke benyttet).

Vi har alt i alt vist:

$$|A| \leqq |B| \quad \textit{og} \quad |A| \neq |B| \quad \Leftrightarrow \quad |A| < |B|$$

Af det foregående følger nu også at:

$$|A| \leqq |B| \quad \Leftrightarrow \quad |A| < |B| \quad \textit{eller} \quad |A| = |B|$$

Alt i alt har vi sikret os at definitionerne af ulighedstegn for transfinite kardinaltal har samme egenskaber som ulighedstegnene for de reelle tal.

Der er dog endnu en egenskab gældende for ulighedstegn for de reelle tal som ikke selvfølgeligt gælder for de transfinite kardinaltal:
Vil der for to vilkårlige uendelige mængder med kardinaltal **|A|** og **|B|** altid gælde at:

$$|A| \leqq |B| \text{ eller } |A| \geqq |B|$$

eller tilsvarende:

$$|A| < |B| \text{ eller } |A| > |B| \text{ eller } |A| = |B|$$

Dvs. kan to vilkårlige uendelige mængders kardinaltal altid sammenlignes?
Spørgsmålet berøres i kapitel 18, punkt **6**.

I litteraturen om kardinaltal ses også at '≦' defineres som her, og at '<' dernæst defineres som '≦ og ikke <'. Dernæst må CSB-teoremet bruges til at bevise vores definition af '<'.

Appendiks 6B. Bevis for CSB teoremet

Vi skal vise at vi ud fra forudsætningerne, **|A|** $\leqq$ **|B|** og **|B|** $\leqq$ **|A|**,
kan konstruere en 1-1 korrespondance mellem **A** og **B**, således at der må gælde **|A|** = **|B|**.

De to forudsætninger formuleret i ord er at der findes to 1-1 korrespondancer, F og G. Det vil i den forbindelse være praktisk for det følgende at vi angiver i hvilken en retning vi bruger F og G, således at vi skriver:

F: 1-1 korrespondance set fra **A** til en ægte delmængde af **B**.
F^{-1}: samme 1-1 korrespondance set fra den ægte delmængde af **B** til **A**.
G: 1-1 korrespondance set fra **B** til en ægte delmængde af **A**.
G^{-1}: samme 1-1 korrespondance set fra den ægte delmængde af **A** til **B**.

F^{-1} kan omtales som den omvendte korrespondance til F. Husk dog at F og F^{-1} stadigvæk repræsenterer den samme 1-1 korrespondance. Tilsvarende for G og G^{-1}.

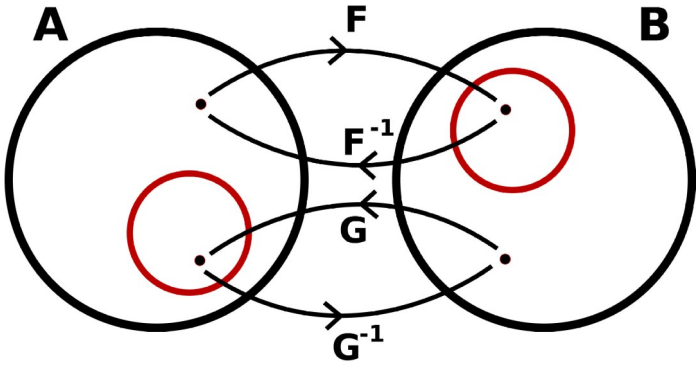


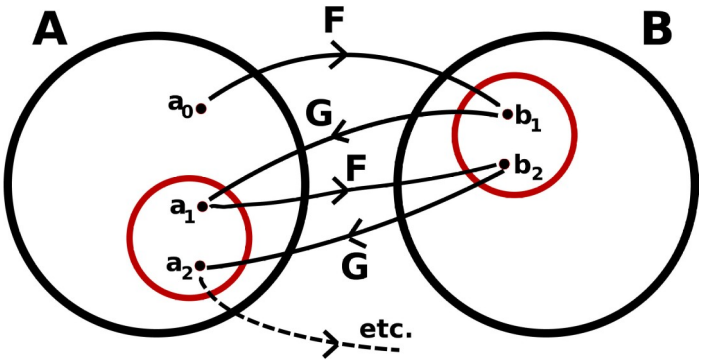
Illustration af 1-1 korrespondancerne F og G og deres omvendte F^{-1} og G^{-1}.
De røde cirkler angiver de ægte delmængder i henholdsvis **A** og **B**.

Ved hjælp af de to 1-1 korrespondancer F og G etablerer vi nu en "kæde" som starter med et element a_0 i **A**. a_0 går via F over i et element b_1 i **B**, dernæst videre via G over i elementet a_1 i **A** etc, her skrevet mod højre således:

$$a_0 \xrightarrow{F} b_1 \xrightarrow{G} a_1 \xrightarrow{F} b_2 \xrightarrow{G} a_2 \ldots$$ fortsætter uendeligt (evt. cyklisk)

("mod højre" refererer til hvilken vej vi går i kæden, ikke til retninger i den følgende figur)

Da F laver korrespondance med alle elementer i **A** til nogle af elementerne i **B**, og G laver korrespondance med alle elementer i **B** til nogle af elementerne i **A**, kan kæden fortsættes mod højre i det uendelige.
Det er muligt at den fra et vist sted gentages cyklisk.



Uendelig kæde med start i a_0 via F til b_1 og videre via G til a_1 etc ...

Dernæst vil vi ved hjælp af de to 1-1 korrespondancer lade kæden gå mod venstre, således at den starter i a_0 i **A** og via G^{-1} går over i et element b_{-1} i **B**, dernæst videre via F^{-1} til a_{-1} i **A** etc:

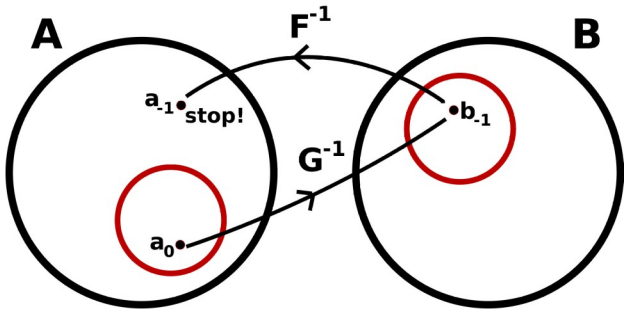
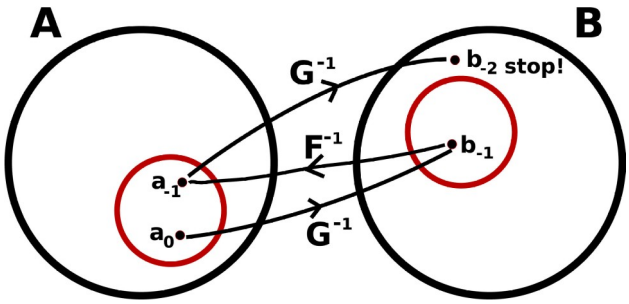
$$\text{fortsætter eller stopper} \ \ldots \ a_{-2} \overleftarrow{F^{-1}} b_{-2} \overleftarrow{G^{-1}} a_{-1} \overleftarrow{F^{-1}} b_{-1} \overleftarrow{G^{-1}} a_0$$

(Se figuren på næste side. "mod venstre" refererer til hvilken vej vi går i kæden)

I modsætning til at gå mod højre i kæden kan vi ikke vide om vi altid kan gå mod venstre. Allerede for det første a_0 kræver et skridt mod venstre i kæden, at der findes et b_{-1} som ved G^{-1} korresponderer med a_0. Men da det ikke er sikkert at a_0 tilhører den ægte delmængde af **A** og dermed har et element i **B** at korrespondere med via 1-1 korrespondancen G^{-1}, kan kæden gå i stå allerede ved det første element a_0.
Men skulle det lykkes at gå et skridt til venstre i kæden til b_{-1}, kan kæden også stoppe dér. For det er ikke sikkert at b_{-1} tilhører den ægte delmængde af **B** og dermed har et element i **A** at korrespondere med via 1-1 korrespondancen F^{-1}.

Der må nu være tre muligheder for kædens fortsættelse mod venstre:

1. Kæden stopper ved et element i **A** (evt. allerede det første element a_0).
   Kæden kaldes for **k1-type** og alle elementer i kæden kaldes for k1-typer.
2. Kæden stopper ved et element i **B**.
   Kæden kaldes for **k2-type** og alle elementer i kæden kaldes for k2-typer.
3. Kæden fortsætter i det uendelige mod venstre.
   Kæden kaldes for **k3-type** og alle elementer i kæden kaldes for k3-typer.

	
Kæde med start i a_0 via G^{-1} til b_{-1} og videre via F^{-1} til a_{-1} hvor den stopper, da a_{-1} ligger udenfor den ægte delmængde af **A** (rød cirkel) som G^{-1} korresponderer med. Et eksempel på en kæde af k1-typen.	Kæde med start i a_0 via G^{-1} til b_{-1} og videre. Denne kæde stopper med b_{-2} som ligger udenfor den ægte delmængde af **B** (rød cirkel) som F^{-1} korresponderer med. Et eksempel på en kæde af k2-typen.

Kæden med start henholdsvis mod højre (ved F og G) og mod venstre (ved F^{-1} og G^{-1}) fra a_0 kunne lige så godt være startet fra et hvilket som helst af sine andre elementer, f.eks. fra b_1. En bid af den samlede kæde (både mod højre og mod venstre) ser således ud:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & \rightarrow & G & & F & & G & & F & & G & & F & \rightarrow \\ \text{stopper evt. } \ldots & b_{-2} & & a_{-1} & & b_{-1} & & a_0 & & b_1 & & a_1 & & b_2 & \ldots \text{ fortsætter uendelig} \\ & & \leftarrow & G^{-1} & & F^{-1} & & G^{-1} & & F^{-1} & & G^{-1} & & F^{-1} & \leftarrow \end{array}$$

For at komme videre i ræsonnementet skal vi lige overbevise os om at to vilkårlige kæder aldrig kan indeholder fælles elementer. Det skyldes at kæderne er entydigt bestemt både mod højre og mod venstre fordi de dannes ved de to 1-1 korrespondancer F og G og deres omvendte. Hvis to kæder har bare ét element til fælles, f.eks. et bestemt a, så må de to kæder være helt identiske, for alle elementer til højre og til venstre for dette a er entydigt bestemt.

Vi kan derfor nu lave en opdeling af elementerne i **A** i tre klasser (områder) som er entydigt bestemt af de to givne 1-1 korrespondancer F og G. De tre klasser består af elementer af henholdsvis k1-typen, k2-typen eller k3-typen efter hvilken type kæde de tilhører. Fordi ingen kæder har fælles elementer overlapper de tre klasser ikke. Og fordi ethvert element i **A** enten er k1-type, k2-type eller k3-type udgør de tre klasser tilsammen hele **A**.

En tilsvarende opdeling i klasser kan laves i mængden **B**.
Og alle en given kædes elementer fra **A** og **B** må være af samme type (k1, k2 eller k3), nemlig samme typer som kæden selv. Så et k1-type element i **A** kan f.eks. ikke være i samme kæde med et k2-type element i **B**.

Vi kan nu på grundlag af dette konstruere en 1-1 korrespondance H mellem (hele) **A** og (hele) **B**.

1-1 korrespondancen H defineres således:

1. Et element i **A** af k1-typen skal korrespondere med et element i **B** via F.
   - Dvs. det tilsvarende element i **B** er elementet et skridt til højre i kæden fra elementet i **A** (og vi kan jo altid bevæge os mod højre).
2. Et element i **A** af k2-typen skal korrespondere med et element i **B** via G^{-1}.
   - Dvs. det tilsvarende element i **B** er elementet et skridt til venstre i kæden fra elementet i **A** (og vi kan netop bevæge os mindst ét skridt til venstre fordi vi er i en k2-type kæde).
3. Et element i **A** af k3-typen skal korrespondere med et element i **B** via F.
   - Dvs. det tilsvarende element i **B** er elementet et skridt til højre i kæden fra elementet i **A** (og vi kan jo altid bevæge os mod højre).
   (I dette tilfælde kunne vi også have valgt at benytte G^{-1} et skridt til venstre i kæden, for en k3-type kæde fortsætter jo også uendeligt mod venstre.)

Vi skal nu overbevise os om at H virkelig er en 1-1 korrespondance mellem hele **A** og hele **B**.
H er en 1-1 korrespondance. Det følger dels af at både F og G^{-1} er sådanne.
Dels af at k1-type elementer i **A** ved F korresponderer med k1-type elementer i **B** (de tilhører jo samme k1-type kæde), og tilsvarende at k2-type elementer i **A** ved G^{-1} korreponderer med k2-typer elementer i **B**. Derfor kan F og G^{-1} ikke skabe "sammenstød", f.eks. ved at et element i **B** korresponderer med to forskellige elementer i **A** ved henholdsvis F og G^{-1}.
H er defineret for alle elementer i **A**. Det følger af selve konstruktionen som jo er baseret på klassedelingen af elementerne i **A**.

Vi skal også være sikre på at H korresponderer med alle elementerne i **B**.
Vi ser på elementer i **B** fra hver sin klasse og checker om de er med i korrespondancen:

1. Hvis et element i **B** er af k1-typen:
   - så indgår elementet i en k1-kæde og der findes derfor et element i **A** (af k1-typen) et skridt til venstre som via F korresponderer med elementet i **B**.
2. Hvis et element i **B** er af k2-typen:
   - ethvert element i **B** korresponderer via G med et element i **A**, og dette element i **A** er af k2-typen (fordi elementet i **B** er k2) og findes et skridt til højre i kæden og korresponderer via G^{-1} med elementet i **B**.
3. Hvis et element i **B** er af k3-typen:
   - så indgår elementet i en k3-kæde og der findes derfor et element i **A** (af k3-typen) et skridt til venstre som via F korresponderer med elementet i **B**.

Bemærk at vi er nødt til at benytte begge 1-1 korrespondancer F og G^{-1}.
Vi kan ikke nøjes med at benytte F, for der findes elementer i **B** af k2-typen som ikke har noget element i **A** at korrespondere med via F (fordi elementet ikke ligger i den ægte delmængde af **B** som F korresponderer med).
Og vi kan heller ikke nøjes med at benytte G^{-1}, for der findes elementer i **A** af k1-typen som ikke har noget element i **B** at korrespondere med via G^{-1} (fordi elementet ikke ligger i den ægte delmængde af **A** som G^{-1} korresponderer med).

Hermed er beviset for CSB-teoremet fuldført.

Vi kunne naturligvis også have valgt at definere 1-1 korrespondancen H mellem **A** og **B** ved at tage udgangspunkt i klassedelingen af **B**.

Den omtalte inddeling i 'klasser' kaldes i matematik en opdeling i 'ækvivalens-klasser'. Den pågældende mængde opdeles således, at ingen ækvivalens-klasser overlapper indbyrdes (de er indbyrdes disjunkte), og deres foreningsmængde udgør tilsammen hele mængden.
Til en ækvivalens-klasse opdeling svarer en 'ækvivalens-relation'. Dette bliver også omtalt i en anden forbindelse i appendiks 9C.
Opdeling i ækvivalens-klasser benyttes flere andre steder i dette skrift.

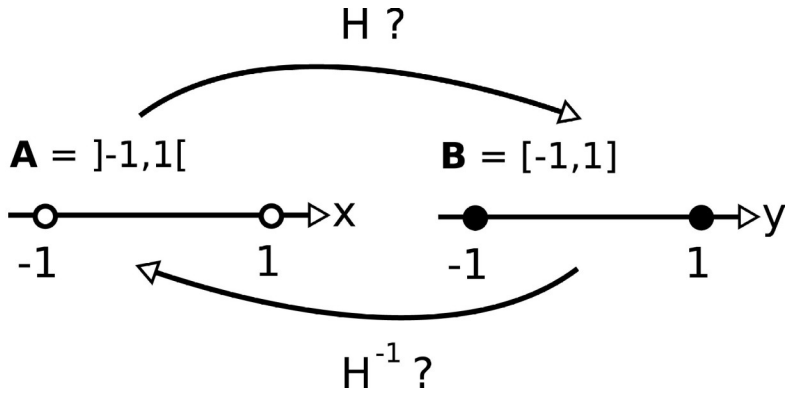
Appendiks 6C. Eksempel til illustration af CSB teoremet og dets bevis

Det **åbne interval** fra -1 og 1 betegnes **A** =]-1,1[og består af alle reelle tal fra -1 til 1, -1 og 1 ikke medregnet, dvs. alle x i **R** hvor -1 < x < 1.

Det **lukkede interval** fra -1 og 1 betegnes **B** = [-1,1] og består af alle reelle tal fra -1 til 1, -1 og 1 medregnet dvs. alle x i R hvor -1 ≦ x ≦ 1.

Er]-1,1[og [-1,1] lige mægtige, dvs. findes der en 1-1 korrespondance mellem]-1,1[og [-1,1] ?

Dette er ikke indlysende. For f.eks. en monotont voksende eller aftagende kontinuert funktion (som er en 1-1 korrespondance hvis graf kan tegnes uden at løfte blyanten fra papiret) af et åbent interval, bliver billedmængden (mængden af samtlige mulige værdier af funktionen) også et åbent interval (evt. fra minus uendelig og/eller til plus uendelig), og billedmængden af et lukket interval bliver et lukket interval. Se f.eks. funktionen i appendiks 3.



Vi søger en 1-1 korrespondance H mellem **A** =]-1,1[(det åbne interval) og **B** = [-1,1] (det lukkede interval)

Vi kan nemt finde en 1-1 korrespondance F fra det åbne interval **A** =]-1,1[til en ægte delmængde af det lukkede interval **B** = [-1,1]. Til hvert tal i]-1,1[lader vi blot svare tallet selv, og den ægte delmængde af [-1,1] bliver det åbne interval]-1,1[.

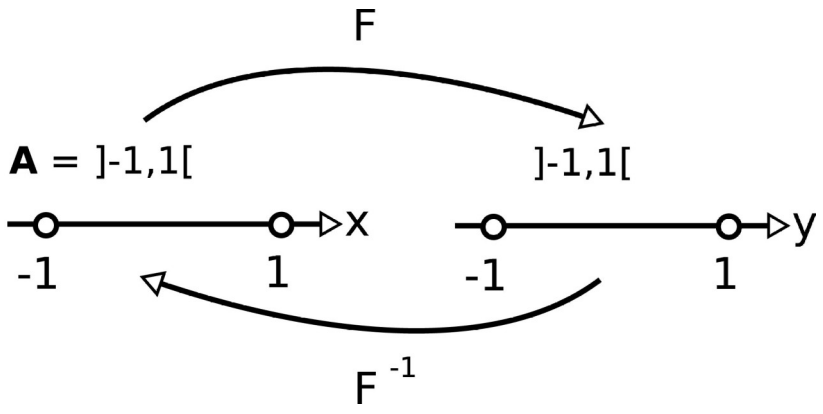
Det er også muligt at konstruere en 1-1 korrespondance G fra det lukkede interval **B** = [-1,1] til en ægte delmængde af det åbne interval **A** =]-1,1[.
Det kan f.eks. gøres således:
Til hvert y i [-1,1] lader vi i]-1,1[svare x = (1/2) y. Dette er en monotont voksende funktion. For y = -1 fås x = -1/2, og for y = 1 fås x = 1/2.

Vi har derfor ved G en 1-1 korrespondance mellem de lukkede intervaller [-1,1] og [-1/2,1/2]. Og intervallet [-1/2,1/2] er en ægte delmængde af]-1,1[.

Med disse 1-1 korrespondancer, F og G, er betingelserne for CSB teoremet opfyldt, og konklusionen er, at der findes en 1-1 korrespondance H fra **A** =]-1,1[(det åbne interval) til **B** = [-1,1] (det lukkede interval).

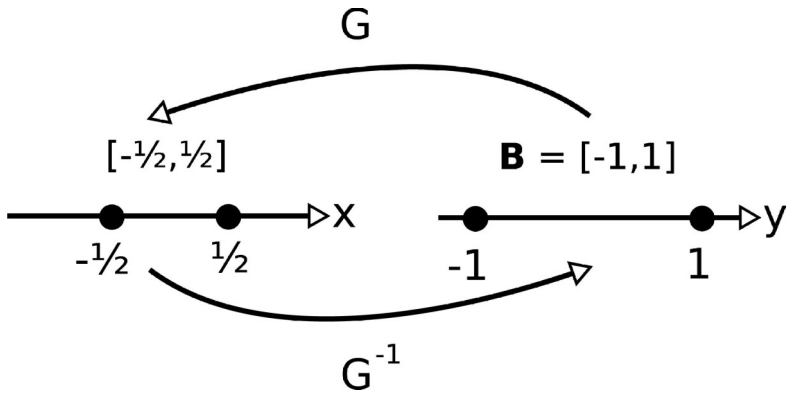
Lad os benytte beviset for CSB teoremet til at finde 1-1 korrespondancen H ud fra de givne 1-1 korrespondancer F og G, hvor som nævnt:

F: x i **A** svarer til y = x i **B** $\Leftrightarrow$ F^{-1}: y i **B** svarer til x = y i **A**.



F lader hvert element i **A** =]-1,1[svare til sig selv i den ægte delmængde]-1,1[af **B** og omvendt for F^{-1}.

G: y i **B** svarer til x = 1/2 y i **A** $\Leftrightarrow$ G^{-1}: x i **A** svarer til y = 2x i **B**.



G halverer værdien af hvert element i **B** = [-1,1] til et element i den ægte delmængde [-1/2,1/2] i **A**, og G^{-1} fordobler værdien af hvert element i [-1/2,1/2] i **A** til et element i **B** = [-1,1].

Vi skal finde k1-kæderne og k2-kæderne. Det værd at bemærke at de elementer i **B** som ikke korresponderer med noget ved F (eller F^{-1}) er tallene -1 og 1. Og at de elementer i **A** som ikke korresponderer med noget ved G (eller G^{-1}) er alle tal uden for intervallet [-1/2,1/2].

En kæde ser således ud med udgangspunkt i et a_0 i **A**:

$$\text{stopper evt. } \ldots\ b_{-2}\ G^{-1}\ a_{-1}\ F^{-1}\ b_{-1}\ G^{-1}\ \overset{\leftarrow}{a_0}\ F\ b_1\ G\ a_1\ F\ b_2\ \ldots \text{ fortsætter}$$

Vi starter med et a_0 i **A** og går mod venstre i kæden.
Hvert a_0 i **A** føres ved G^{-1} over i et b_{-1} i **B** med den dobbelte værdi.
Dernæst føres b_{-1} i **B** ved F over i a_{-1} i **A** med samme værdi. Etc.

Hvornår stopper kæden? Det gør den hvis vi i **A** får et a som ligger udenfor intervallet [-1/2,1/2], idet G^{-1} ikke kan korrespondere med sådanne tal.
Eller hvis vi i **B** får et b med værdien -1 eller 1, idet F^{-1} ikke korrespondere med disse tal.

For ethvert a udenfor intervallet [-1/2,1/2] i **A** går kæden i stå med det samme, så det pågældende a er et k1-element.
Ethvert a i intervallet [-1/2,1/2] i **A** bliver fordoblet ved G^{-1} ovre i **B**. Specielt vil alle a, i [-1/2,1/2], *undtagen de værdier som nævnes i næste afsnit,* gå til et dobbelt b i **B** og tilbage til et a i **A** med samme værdi. En sådan kæde må efter et passende antal fordoblinger få et a der havner udenfor det lukkede interval [-1/2,1/2] i **A**, og så går den i stå, og den er så en k1-kæde som stopper i **A**, og dens elementer er k1-elementer.
F.eks. (start i kæden fra højre med 3/16 i **A** og gå mod venstre):

$$\text{stop } 3/4 \text{ (i A) } F^{-1}\ 3/4 \text{ (i B) } G^{-1}\ 3/8 \text{ (i A) } F^{-1}\ 3/8 \text{ (i B) } G^{-1}\ \overset{\leftarrow}{3/16} \text{ (i A)}$$

De a-værdier i [-1/2,1/2] som må undtages, er alle de værdier som ved den gentagne fordobling på et eller andet tidspunkt rammer værdierne -1 eller 1 ovre i **B**. De værdier må være +/- potenser af 1/2 og vi får b-kæder som stopper i **B**.
F.eks. (start fra højre i kæden med $1/8 = (1/2)^3$ i A og gå mod venstre):

$$\text{stop } 1 \text{ (i B) } G^{-1}1/2 \text{ (i A) } F^{-1}1/2 \text{ (i B) } G^{-1}1/4 \text{ (i A) } F^{-1}1/4 \text{ (i B) } G^{-1}\overset{\leftarrow}{1/8} \text{ (i A)}$$

Der vil være én kæde som aldrig stopper, men er cyklisk, nemlig den som indeholder tallet 0 i **A**, som jo af G^{-1} føres over i 0 i **B** og dernæst tilbage til 0 i **A**, etc. Den vælger vi at kalde en k1-kæde.

Konklusion:
k2-kæderne indeholder alle de elementer i **A** som som er +/- potenser af 1/2:

$$+/- \ 1/2, 1/4, 1/8, \ldots, (1/2)^n, \ldots \quad (n \geqq 1)$$

k1-kæderne indeholder alle andre elementer i **A**.

1-1 korrespondancen H mellem **A** =]-1,1[og **B** = [-1,1] kan nu defineres:
Til alle $a = (1/2)^n$ med $n \geqq 1$ i **A** lader vi ved $H = G^{-1}$ svare den dobbelte værdi i **B**. Til alle andre a i **A** lader vi ved H = F svare den samme værdi i **B**.

*Check at H korresponderer med alle elementer i **B**.*
*Check at hvert element i **B** korresponderer med præcist ét element i **A**.*
*Hvilke tal i **B** svarer tallene i **A** af formen* $(1/2)^n$ *(med* $n \geqq 1$*) til?*
*Hvilke to elementer i **A** korresponderer med -1 og 1 i **B**?*
*Hvorfor kunne vi ikke blot nøjes med at lade disse to elementer i **A** korrespondere via* G^{-1} *og lade alle andre elementer korrespondere ved F?*

CSB teoremet hjælper os på to måder: Dels med at slå fast at der findes en 1-1 korrespondance H mellem **A** og **B**, når blot vi har opfyldt betingelserne via de givne 1-1 korrespondancer F og G (og deres omvendte). Dels med direkte at anvise en måde at konstruere H på.

Uden hjælp fra CSB teoremet kunne vi måske have fået ideen til 1-1 korrespondancen H ved at opdele **A** i to klasser, en med værdier af formen $(1/2)^n$ med $n \geqq 1$ og en med alle andre værdier.
Førstnævnte klasse i **A**, tallene med elementer af form $(1/2)^n$, er nummerabel og den korresponderer med en nummerabel delmængde i **B** forskudt ved fordoblingen ved G^{-1}, således at -1 og 1 i **B** kommer med.
Sidstnævnte klasse i **A** er alle andre elementer, og den er identisk med den tilsvarende delmængde i **B**, derfor kan F bruges som korrespondance på den.

Dette "trick" at udskille en nummerabel mængde fra en ikke-nummerabel mængde benyttes ofte i mængde-teorien. Noget tilsvarende ses i kapitel 18, regel 4.

At]-1,1[og [-1,1] er lige mægtige kan også mere direkte indses ud fra CSB-teoremet uden at finde mulige 1-1 korrespondancer F og G.
Generelt følger nemlig af CSB-teoremet at hvis vi har 3 delmængder for hvilke, **A** ⊆ **B** ⊆ **C**, hvor kardinaltallene for **A** og **C** samtidig er lige store, **|A|** = **|C|**, så vil alle de tre mængders kardinaltal være lige store: **|A|** = **|B|** = **|C|**.

For af **A** ⊆ **B** og **B** ⊆ **C** følger at **|A|** ≦ **|B|** og **|B|** ≦ **|C|**, men da **|A|** = **|C|** fås så, ved at erstatte **C** med **A**, at **|A|** ≦ **|B|** og **|B|** ≦ **|A|**, og CSB-teoremet giver så at **|A|** = **|B|**. Tilsvarende fås **|B|** = **|C|** ved at erstatte **A** med **C**.

Anvendt på det aktuelle eksempel hvor]-1,1[⊆ [-1,1] ⊆ **R** har vi at kardinaltallene for]-1,1[og **R** er identiske (appendiks 3), og derfor må kardinaltallene for]-1,1[og [-1,1] også være identiske, dvs.]-1,1[og [-1,1] er lige mægtige.

Appendiks 6D. Alternativt bevis af CSB teoremet

Dette må nærmest kaldes et appendiks til appendikset om CSB teoremet.
Jeg blev på et tidspunkt opmærksom på et alternativt bevis for dette teorem som jeg så medtager her, fordi jeg synes det er interessant. Nogle vil måske finde dette bevis enklere end det mere "traditionelle" bevis fremstillet i appendiks 6B.

Det alternative bevis omtales som en mulighed i en Excercise i Halmos (1960, 1974) "Naive Set Theory" i afsnittet om CSB teoremet, section 22, "Schröder-Bernstein Theorem".
Det er behandlet i Enderton (1977), "Elements of Set Theory" i kap. 6, "Cardinal Numbers and the Axiom of Choice".

I det følgende tillader jeg mig at bruge gængse betegnelser for matematiske funktioner (eller afbildninger) og deres egenskaber.

At **f**: **A** → **B** er en funktion betyder at der til hvert element i **A** svarer præcis ét element, funktionens værdi eller billede, i **B**. Billedmængden for f er den delmængde af **B** som indeholder funktionens værdier, skrives f(**A**).

At funktionen **f**: **A** → **B** er **injektiv** betyder at **f** afbilder **A** som en 1-1 korrespondance på delmængden **f(A)** af **B**. Det betyder at to forskellige elementer i **A** ikke ved **f** kan føres over i det samme element i **B**.
Hvis **f(A)** specielt er hele **B**, kaldes funktionen **surjektiv**. En funktion som både er injektiv og surjektiv kaldes **bijektiv**. Vi har så at **f** er en 1-1 korrespondance mellem **A** og **B**.

Når funktionen f er injektiv kan vi definere den inverse funktion $\mathbf{f}^{-1}$: **f(A)** → **A**.
Hvis **f** afbilder elementet a i **A** på elementet b i **B**, vil den inverse $\mathbf{f}^{-1}$ gå den modsatte vej:

$$\mathbf{f}(a) = b \iff \mathbf{f}^{-1}(b) = a$$

I beviset for CSB-teoremet i appendiks 6B benyttedes de injektive funktioner:

$$\mathbf{f}: \mathbf{A} \to \mathbf{B} \text{ og } \mathbf{g}: \mathbf{B} \to \mathbf{A}$$

Definitionsmængderne for funktionerne **f** og **g** er henholdsvis **A** og **B**.
Billedmængden for funktionerne **f** og **g** er f(**A**) og g(**B**) og de er henholdsvis delmængder af **B** og **A**:

$$\mathbf{f(A)} \subseteq \mathbf{B} \quad \text{og} \quad \mathbf{g(B)} \subseteq \mathbf{A}$$

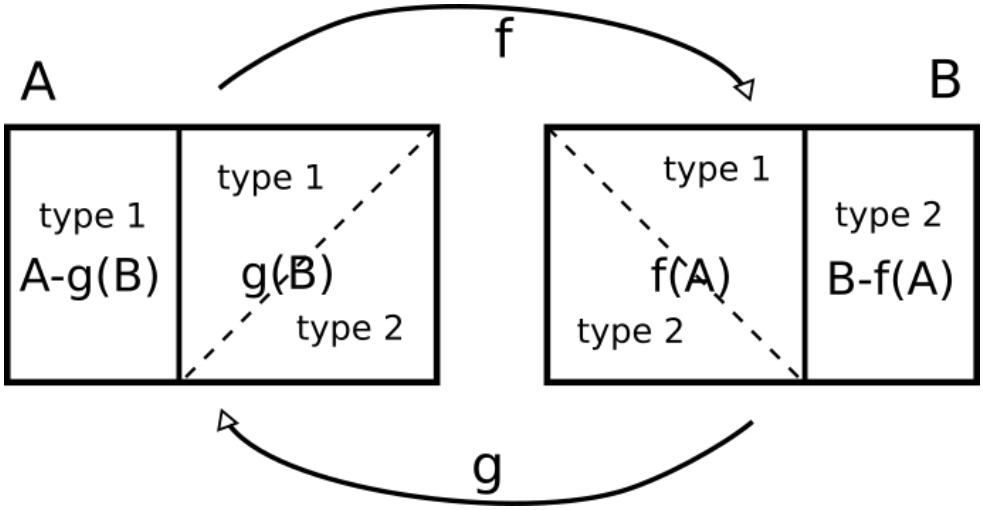
I CSB-teoremet er forudsætningen at **f(A)** og **g(B)** er ægte delmængder af henholdsvis **B** og **A**, altså at **f** og **g** ikke er surjektive (i modsat fald har vi jo en 1-1 korrespondance mellem **A** og **B** på forhånd), så vi kan skrive:

$$\mathbf{f(A)} \subset \mathbf{B} \quad \text{og} \quad \mathbf{g(B)} \subset \mathbf{A}$$

De kæder vi opbyggede i beviset i appendiks 6B gik til højre ved skiftevis brug af funktionerne **f** og **g**, og de gik til venstre ved skiftevis brug af de inverse funktioner $\mathbf{g}^{-1}$ og $\mathbf{f}^{-1}$. Opdelingen af **A** (og tilsvarende **B**) i 3 klasser var baseret på, om kæderne til venstre stoppede i **A** eller i **B** eller fortsatte uendeligt. På grundlag af denne opdeling kunne vi definere en 1-1 korrespondance mellem **A** og **B** i form af den eftersøgte bijektive afbildning **h** fra **A** til **B**.

Det alternative bevis er også baseret på kæder, men her benyttes kæder mod højre ved skiftevis brug af **f** og **g** til at lave en opdeling af **A** (og **B**) i 2 klasser som grundlag for definition af den bijektive funktion **h**.

Beviset kan illustreres således:



Vi ser mængden **A** til venstre og mængden **B** til højre.

De to funktioner **f**: **A** → **B** og **g**: **B** → **A** er vist.
Mængden **A** er opdelt i to områder:
Billedmængden for funktionen **g**, **g(B)**, samt resten af **A** som betegnes **A-g(B)**.
Tilsvarende er mængden **B** opdelt i to områder:
Billedmængden for funktionen **f**, **f(A)**, samt resten af **B** som betegnes **B-f(A)**.

Vi laver nu en kæde som starter med elementet a i mængden **A-g(B)**.
Det føres af funktionen **f** over i elementet **f**(a) som ligger i billedmængden **f(A)**.
Dernæst føres **f**(a) af funktionen **g** over i elementet **g(f(a))** i **g(B)**.
Og så fremdeles i det uendelige:

$$a \rightarrow \mathbf{f}(a) \rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{f}(a)) \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{f}(a))) \rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{f}(a)))) \rightarrow \ldots$$

Vi har altså, at det første element i kæden tilhører **A-g(B)**, alle øvrige tilhører på skift **f(A)** og **g(B)**.
I dette bevis benytter vi kun denne ene slags kæde.

Alle elementer i **A** og i **B** som tilhører sådanne kæder kaldes **type 1 elementer**.
Alle elementer i **A** og i **B** som ikke er type 1 elementer kaldes **type 2 elementer**.
De to mængder **A** og **B** bliver på denne måde hver opdelt i 2 klasser bestående af type 1 og type 2 elementer.

I **A** må alle elementer i **A-g(B)** være type 1 da de udgør starten af disse kæder.
I **g(B)** kan findes både elementer af type 1 og type 2.

Ovre i **B** må alle elementer i **B-f(A)** være type 2. For ingen kæder kan jo føre over i **B-f(A)** fordi denne delmængde ligger udenfor billedmængden **f(A)** til **f**.
I **f(A)** kan findes både elementer af type 1 og type 2.

Vi kan antage at hverken **A-g(B)** eller **B-f(A)** er tomme. For hvis **g(B)** = **A** eller **f(A)** = **B** kan trivielt henholdsvis $\mathbf{g}^{-1}$ eller **f** bruges som bijektiv funktion fra **A** til **B**, og så er vi færdige før vi har begyndt.

Den bijektive funktion **h**: **A** → **B** kan nu konstrueres således:
Hvis elementet a_1 i **A** er type 1 sætter vi $\mathbf{h}(a_1) = \mathbf{f}(a_1)$.
Hvis elementet a_2 i **A** er type 2 sætter vi $\mathbf{h}(a_2) = \mathbf{g}^{-1}(a_2)$.

Med hensyn til definitionen af **h** for type 2 elementer kan vi være sikre på at $\mathbf{g}^{-1}(a_2)$ findes, fordi alle type 2 elementer i **A** jo ligger i **g**'s billedmængde **g(B)**.

Vi skal nu sikre os at **h**: **A** → **B** er en bijektiv funktion, dvs. dels at den er injektiv, dels at den er surjektiv.

Da f og g begge er injektive behøver vi kun at undersøge om det kan ske at to elementer i **A**, det ene af type 1 (a_1) og det andet af type 2 (a_2) ved funktionen **h** føres over i det samme element i **B**.
Så lad os i et indirekte bevis antage at vi har fundet et a_1 (type 1) og et a_2 (type 2) så:

$$\mathbf{h}(a_1) = \mathbf{h}(a_2) \text{ dvs. } \mathbf{f}(a_1) = \mathbf{g}^{-1}(a_2).$$

Dette element ligger i **B** og kan ved **g** føres tilbage til **A**: $\mathbf{g}(\mathbf{f}(a_1)) = \mathbf{g}(\mathbf{g}^{-1}(a_2))$.
Men her er venstre side et type 1 element, mens højre side simpelthen er a_2 (ført fra **A** til **B** og tilbage igen til sig selv i **A**), og dermed af type 2.

Men det samme element kan ikke både være type 1 og type 2.
Vores antagelse at $\mathbf{f}(a_1) = \mathbf{g}^{-1}(a_2)$ må derfor være falsk, altså er **h** injektiv.

Er **h** surjektiv, dvs. er **h(A)** = **B**, dvs. vil der til alle elementer b i **B** findes et a i **A** så b = **h**(a)?
Hvis et b i **B** er type 1 må b være element i en kæde, og det foregående led i den kæde må netop være et a som ved **f** føres over i b, altså b = **f**(a) = **h**(a).
Hvis b i **B** er type 2 må **g**(b) i delmængden **g(B)** i **A** også være type 2. For hvis **g**(b) var type 1 ville den indgå i en kæde hvis forrige led ville være b, og så ville også b være type 1. Vi har så fundet et a = **g**(b) i **A** således at
b = $\mathbf{g}^{-1}$(a) = **h**(a). h må derfor også være surjektiv.

Appendiks 7. Talsystemer

Henvist fra kapitel 16, Sammenligning af kardinaltallene **|P(N)| og** $\aleph$.

Normalt benytter vi 10-talsystemet (positions-talsystemet) med de 10 cifre 0, 1, 2, ... , 9. Men det skyldes jo den "tilfældighed" at vi har 10 fingre! Hvis vi kun havde haft 2 fingre, havde vi haft 2 cifre til rådighed: 0 og 1, og vi ville nok have talt på denne måde:

0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, ...

Når de 1-cifrede tal slipper op, skifter vi til 2 cifre ved hjælp af positionssystemet. I 10-talsystemet betyder f.eks. '123' 1 hundreder plus 2 tiere plus 3 enere, eller

$$321 = 3*10^2 + 2*10^1 + 1*10^0. \quad (10^0 = 1)$$

Tilsvarende vil i 2-talsystemet '10111' oversat til 10-talsystemet betyde

$$1*2^4 + 0*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 = 16 + 4 + 2 + 1 = 23.$$

Det er muligt at oversætte alle tal, også decimalbrøker, fra det ene talsystem til det andet. Således vil alle reelle tal mellem 0 og 1 i 2-talsystemet kunne repræsenteres ved decimalbrøker som starter med '0,' og decimaler bestående af cifrene '0' og '1'.
F.eks. er (indeks '2' for 2-talsystemet og indeks '10' for 10-talsystemet):

$$0{,}1011_2 = 1*(1/2)^{-1} + 0*(1/2)^{-2} + 1*(1/2)^{-3} + 1*(1/2)^{-4} = 11/16 = 0{,}6875_{10}$$

Omsætning fra 10-talsystemet til 2-talsystemet og omvendt kan ske ved flere forskellige passende algoritmer.

Eksempel, omsætning af hele tal: 23_{10} ønskes omregnet til 2-talsystemet.
Vi kan finde 1'erne ved at finde resten ved division med 2. Dernæst gøre det samme med kvotienten, for 1'eren i den svarer til 10'eren i det oprindelige tal, og så fremdeles:

23/2 = 11 rest **1** (1'eren)
11/2 = 5 rest **1** (10'eren)
5/2 = 2 rest **1** (100'eren)
2/2 = 1 rest **0** (1.000'eren)
1/2 = 0 rest **1** (10.000'eren)

Resultatet bliver (læses nedefra og op): $23_{10} = 10.111_2$

Den omvendte algoritme kan bruges til at komme fra 10.111_2 til 23_{10} :

0 * 2 + 1 = 1
1 * 2 + 0 = 2
2 * 2 + 1 = 5
5 * 2 + 1 = 11
11 * 2 + 1 = **23**

Resultatet bliver: $10.111_2 = 23_{10}$

Eksempel, omsætning af decimalbrøker: $0{,}6875_{10}$ ønskes omregnet til 2-talsystemet.
Ved mulitiplikation med 2 får vi enten resultatet > 1, og så må første decimal være '1', eller resultatet < 1, og så er første decimal '0'. Derefter gøres det samme med resultatets decimaler efter kommaet (dvs. 1 foran kommaet fjernes hvis resultatet er > 1), og så fremdeles:

0,6875 * 2 = **1**,3750
0,3750 * 2 = **0**,75
0,75 * 2 = **1**,5
0,5 * 2 = **1**
(0 * 2 = 0)

Resultatet bliver: $0{,}6875_{10} = 0{,}1011_2$

Den omvendte algoritme som omsætter $0{,}1011_2$ til $0{,}6875_{10}$, ser således ud:

0/2 + 1 = 1
1/2 + 1 = 1,5
1,5/2 + 0 = 0,75
0,75/2 + 1 = 1,375
1,375/2 (+0) = **0,6875**

Algoritmerne kan naturligvis benyttes tilsvarende også for andre positions-talsystemer.

Se evt. mere her: https://en.wikipedia.org/wiki/Binary_number

Appendiks 8. Udbedring af fejl i beviset for **|P(N)|** = ℵ

Henvist fra kapitel 16, Sammenligning af kardinaltallene **|P(N)| og** ℵ.

Beviset for **|P(N)|** = ℵ har tilsyneladende en ret alvorlig fejlslutning. Vi benytter faktisk en sammensætning af to 1-1 korrespondancer. Vi har en 1-1 korrespondance mellem mængden af delmængder af **N** og decimalbrøker mellem 0 og 1 skrevet i 2-talsystemet. Desuden forudsætter vi, at der er en 1-1 korrespondance mellem decimalbrøkerne og de reelle tal mellem 0 og 1. Altså at der til hvert reelt tal mellem 0 og 1 entydigt svarer en bestemt decimalbrøk. Men dette er ikke tilfældet!

I slutningen af appendiks 4 om decimalbrøker omtales at alle reelle tal givet ved endelige decimalbrøker også kan fremstilles ved en uendelig decimalbrøk.
F.eks. 0,5 = 0,4**9**999...
Dette gælder også for decimalbrøker i 2-talsystemet, f.eks. er 0,1 = 0,0**1**111...
I beviset må endelige decimalbrøker i 2-talsystemet skrives som uendelige decimalbrøker som har perioden 0 fra et vist trin, f.eks. 0,1 = 0,1**0**00... . Men da tallet 0,1 desuden kan skrives 0,1 = 0,0**1**111... vil dette ene reelle tal komme til at korrespondere med to forskellige delmængder af **N**. Og dette vil gælde for alle endelige decimalbrøker i 2-talsystemet.

Heldigvis kan denne fejl i beviset udbedres. For mængden af reelle tal mellem 0 og 1 med endelig decimalbrøk er nummerabel i et vilkårligt talsystem. Vi kan etablere en algoritme til at nummerere dem, så hvert tal nås i et endeligt antal skridt.
For endelige decimalbrøker mellem 0 og 1 kan vi f.eks. starte med at nummerere de endeligt mange med 1 decimal, dernæst de endeligt mange med 2 decimaler, etc. Decimalbrøker med efterstående 0'er hoppes over ved tællingen (dvs. f.eks.. 0,1 og 0,10 repræsenteres ved 0,1).

Desuden - og det viser vi i kapitel 18, punkt 4 - vil kardinaltallet for en uendelig ikke-nummerabel mængde ikke ændres hvis man fra mængden fjerner en nummerabel delmængde. Vi har så som udgangspunkt en 1-1 korrespondance mellem **P(N)** og decimalbrøkerne i 2-talsystemet mellem 0 og 1 (med de endelige svarende til to forskellige delmængder af **N**). Det viser at kardinalttallene for disse to mængder er identiske. Dernæst fjerner vi de endelige decimalbrøker, og rest-mængden af decimalbrøker vil så stadigvæk have samme kardinaltal som **P(N)**. Og da der kan etableres en 1-1 korrespondance mellem rest-mængden af decimalbrøker og de reelle tal mellem 0 og 1, må restmængden have kardinaltallet ℵ og så må **P(N)** også have kardinaltallet ℵ.

Appendiks 9. Mere om matematikkens aksiomer.

Henvist fra kapitel 19 og 20, om aksiomer og paradokser.

Appendiks 9A. Euklids aksiomer for geometrien

Euklid baserede sin geometri på en række defintitioner og postulater (aksiomer). Hertil supplerede han med nogle bemærkninger om egenskaber ved lighed.
De 5 postulater gengives her i en moderne formulering:

1. Der kan trækkes én ret linje mellem to vilkårlige punkter.
2. Enhver begrænset ret linje kan forlænges ubegrænset.
3. En cirkel kan tegnes med et vilkårligt punkt som centrum og en vilkårlig radius.
4. Alle rette vinkler er lige store.
5. Hvis to rette linjer skæres af en tredje linje, sådan at summen af de indvendige vinkler på den ene side er mindre end to rette vinkler, så vil de to rette linjer skære hinanden når de forlænges ubegrænset til den side hvor de to vinkler ligger.

Det kan vises at det 5. postulat er ækvivalent med følgende formulering, som er den der oftes nævnes som det 5. postulat i dag:

5. Givet en ret linje L og et punkt P udenfor denne. Der findes præcis én ret linje gennem punktet P parallel med L.

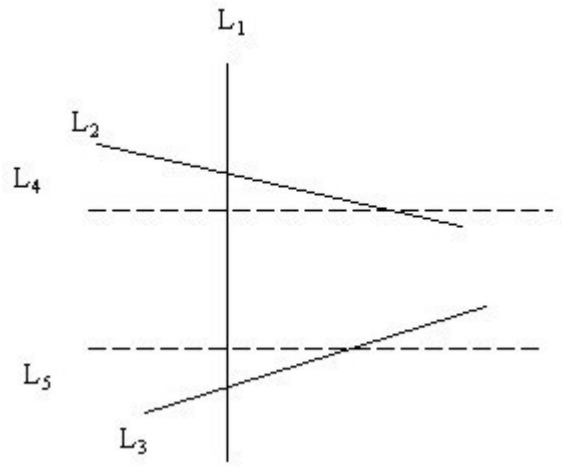
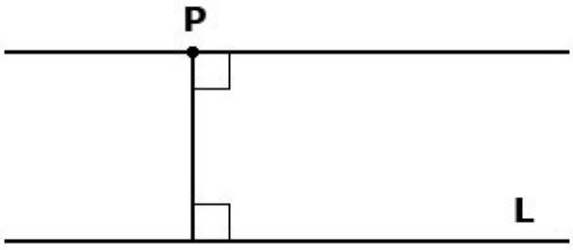
	

Illustration af det 5. postulat i Euklids oprindelige formulering.	Illustration af det 5. postulat i den mest gængse formulering i dag.

I forhold til nutidens krav til formuleringen af aksiomer, er Euklids aksiomer ikke tilstrækkelig præcise, og de forudsætter begreber som ikke klart defineres. Men de er et af de første forsøg på aksiomatisering af geometrien, og værket som helhed er absolut meningsfuldt.

Det 5. postulat kaldes også Euklids 'parallel-postulat'. Euklid var selv skeptisk overfor sit 5. postulat som synes meget mere komplekst end de fire øvrige.
I sine 'Euklids Elementer' undgik han derfor at bruge det 5. postulat i den første række geometriske sætninger, selv om anvendelsen af postulatet i visse tilfælde kunne have gjort beviserne simplere. I beviserne for den videre række af sætninger måtte Euklid dog nødtvungent benytte det 5. postulat.

Tvivlen om nødvendigheden af det 5. postulat fortsatte i mere end 2000 år efter Euklid. Mange matematikere forsøgte at vise at det 5. postulat kunne bevises ud fra de første fire postulater, men det lykkedes ikke. I stedet for at søge efter direkte beviser, forsøgte matematikere i 1600- og 1700-tallet at bevise det 5. postulat ved et såkaldt indirekte bevis, dvs. ved at antage at det 5. postulat ikke gælder, for derefter at vise at denne antagelse fører til en modstrid.
På et tidspunkt troede man at det var lykkedes, idet negationen af det 5. postulat førte til geometrier hvor vinkelsummen i en trekant ikke er 180º, men større eller mindre end 180º. Det lyder sært, men er ikke i modstrid med de fire første postulater. Euklids bevis for at vinkelsummen i en trekant er 180º benytter netop nødvendigvis det 5. postulat.

I løbet af 1800-tallet blev det efterhånden klart, at et geometrisk aksiomatisk system som bygger på de fire første af Euklids postulater samt negationen af det 5. postulat ser ud til at være konsistent, og at det fører til 2 alternative geometrier, de såkaldte 'ikke-euklidiske geometrier', med andre egenskaber end dem vi er vante til i det almindelige 'euklidiske rum'.

Negering af det 5. aksiom giver to alternativer:

1. Der findes ingen ret linje gennem punktet P parallel med linien L.
   'Elliptisk geometri', udviklet af Bernhard Riemann (tysk), vinkelsummen i en trekant er her større end 180º.
2. Der findes mere end én ret linje gennem punktet P parallel med linjen L.
   'Hyperbolsk geometri', udviklet af Nikolai Lobachevsky (russisk), vinkelsummen i en trekant er her mindre end 180º.

Se evt. mere her: https://torstenmeyer.dk/matforhvem0809/mfhsh08a0101.htm

Appendiks 9B. Aksiomerne bag de naturlige tal.

Peano's 5 aksiomer for de naturlige tals er baseret på tre begreber som ikke defineres: 'tal' (som er de naturlige tal), '0' og 'efterfølger', samt andre begreber som f.eks. 'forskellige' og 'egenskab'. Aksiomerne gengives her, dog ikke i den originale form (bl.a. inkluderede Peano ikke '0' i de naturlige tal):

1. 0 er et tal.
2. Efterfølgeren af et tal er et tal.
3. 0 er ikke efterfølger af noget tal.
4. To forskellige tal kan ikke have samme efterfølger.
5. Hvis følgende forudsætninger er opfyldt om en bestemt egenskab:
   - at tallet 0 har egenskaben, samt
   - at hvis et tal har egenskaben, så vil efterfølgeren også have den,
   i så fald kan man slutte at egenskaben gælder for alle tal.

Peano's 5. aksiom kaldes også 'induktions-aksiomet'.
Peano's aksioms-system indeholdt desuden 4 aksiomer som fastlægger egenskaber ved lighedstegnet '='.

I den moderne matematik er Peano's aksiomer blevet erstattet af andre aksioms-systemer baseret på den aksiomatiske mængde-teori. Her tilstræber man at basere hele opbygningen på mængde-begrebet alene.
I det i dag mest gængse aksioms-system (som udgør en del af ZF-systemet omtalt i kapitel 20) defineres f.eks. det naturlige tal 3 som mængden {0, 1, 2}, tallet 2 som mængden {0, 1}, 1 som mængden {0}. Men hvad er så 0?
0 defineres som mængden Ø, altså den tomme mængde!
Ud fra definitionen af 0 kan vi bevæge os frem igen til 1 som så må kunne skrives: 1 = {Ø}, altså en mængde med Ø som element.
2 bliver så {Ø, 1} = {Ø, {Ø}}, og 3 = {Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}}} - lidt af en kinesisk æske!

Hvordan dannes f.eks. 3 ud fra 2? Vi kan sige at 3 er foreningsmængden af mængden 2 og mængden som alene har 2 som element, dvs.:
3 = 2 U {2} = {0, 1} U {2} = {0, 1, 2}.
Vi kalder 2 U {2} for 'efterfølgeren' af 2, men i modsætning til dette begreb i Peano's aksiomer er dette blot et navn for en præcis matematisk definition.

En 'efterfølger-mængde', også kaldet en 'induktions-mængde', er en mængde som har følgende egenskaber:
(1) Den indeholder Ø.
(2) Hvis den indeholder et element x, indeholder den også elementet x U {x}.

At der overhovedet eksisterer en efterfølger-mængde kaldes i ZF-aksiomssystemet 'axiom of infinity'.
De naturlige tal defineres som en nærmere bestemt sådan efterfølger-mængde. Definitionen understøttes af nogle meget fundamentale aksiomer om mængder.

Dette mængde-baserede system er frigjort fra underforståede ikke-definerede begreber. Det har samtidig nogle ret finurlige, men nyttige egenskaber.
Ordningen af de naturlige tal, altså at kunne afgøre hvilket af to givne naturlige tal der er det største eller det mindste, bliver et rent mængde-anliggende:
At 2 er mindre end 3, $2 < 3$, kan formuleres som at mængden 2 er en ægte delmængde af mængden 3: $2 \subset 3$, idet $\{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\}$.
Desuden får de naturlige tal som mængder den specielle egenskab, at der for hvert tal gælder at dets elementer samtidigt er ægte delmængder af tallet.
F.eks. er 3 element i $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, og samtidig er $3 \subset 5$, idet $3 = \{0, 1, 2\}$.
Denne egenskab kan bruges i beviserne for mange afledte teoremer for de naturlige tal.

Peano's aksiomer - inklusive induktions-aksiomet - bliver i dette system til teoremer. Der findes teoremer som ikke kan bevises på grundlag af Peano's aksiomer, men som kan bevises i dette mængde-baserede aksioms-system.

Et eksempel på dette er 'Goodstein's teorem', Goodstein's teorem kan ses som en tal-leg og er beslægtet med et graf-teoretisk spil, 'Hydra Game'. Med start i et vilkårligt tal fås en følge af tal som bliver større eller mindre end det foregående tal ifølge bestemte regler. Goodstein's teorem siger at talfølgen altid ender på tallet 0 uanset hvilket tal man starter fra.
https://en.wikipedia.org/wiki/Goodstein%27s_theorem

Reglerne for Goodstein's teorem er ret komplicerede. En meget simplere tal-leg fås ud fra den såkaldte 'hailstone sequence' ('hagl-talfølge'). Man starter med et vilkårligt tal n. Hvis n er ulige bliver næste tal i følgen $3n+1$. Hvis n er lige bliver næste tal $\frac{1}{2}n$.
F.eks.: 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ... 'Collatz conjecture' siger at hailstone sequences altid på et tidspunkt rammer tallet 1 (og derefter går i cyklus 4, 2, 1, ...). I modsætning til Goodstein's teorem er Collatz conjecture indtil dato hverken bevist eller modbevist.
Computer-beregninger har indtil videre vist, at påstanden holder for start-tal op til 2^{68} (et tal med 21 cifre). Men dette kan ikke betragtes som et bevis. Der findes eksempler på lignende påstande som beregnes at gælde op til meget store tal, for derefter at falde på et kontra-eksempel.
https://en.wikipedia.org/wiki/Collatz_conjecture

De naturlige tal konstrueret på grundlag af dette mængde-baserede aksiomssystem udgør en del af de såkaldte 'von Neumann ordinals'.

Appendiks 9C. Udvidelsen af talbegrebet fra **N** til **Z** og videre til **Q**

Vi har snuset til etableringen af de naturlige tal **N** ved aksiomssystemer som afspejler vores intuitive billede af hvad det vil sige at tælle. Talbegrebet bliver dernæst ud fra **N** trinvist udvidet til de hele tal **Z** og til de rationelle tal **Q**. Udvidelsen fra **Q** til de reelle tal **R** blev antydet i kapitel 10. I dette appendiks skitseres kort hvordan man kan komme fra **N** til **Z** og fra **Z** til **Q**.

Fra de naturlige tal N til de hele tal Z.

Z består af **N** (inklusive 0) og de negative hele tal. En klassisk måde at definere de negative hele tal sker via løsning af ligninger.
Ligningen x + 3 = 5 har en løsning tilhørende **N**, nemlig x = 2.
Ligningen x + 5 = 3 har ikke en løsning indenfor **N**. Men vi "ved jo" at x = -2. Vi har dog ikke defineret hvad den lille streg '-' betyder.
Hvis vi bruger vores skolekundskaber, kan vi løse ligningen x + 3 = 5 ved at "isolere x på venstre side af lighedstegnet" således: x = 5 - 3 = 2.
Subtraktion kan netop defineres indenfor **N** som løsning til en additiv ligning.
Tilsvarende gør vi det samme med ligningen x + 5 = 3, og vi får x = 3 - 5 = -2, men stadigvæk er det lille symbol '-' ikke nærmere defineret.

Inspireret af det foregående er en måde at udvide **N** til **Z** at definere de hele tal som ordnede par. x = 5 - 3 skrives som [5,3] og x = 3 - 5 som [3,5].
[5,3] repræsenterer altså tallet 2, [3,5] repræsenterer tallet -2.
Herefter må vi "glemme" vores skolelærdom. '-2' er blot et nyt symbol for det ordnede par [3,5], og tallet kaldes 'minus 2' og kaldes 'negativt'.

Men vi har et problem. Hvis vores definition skal stemme med vores intuitive opfattelse af de negative tal, går det ikke at låse f.eks. '-2' til det ordnede par [3,5]. For '-2' kunne jo lige så godt have været defineret ved f.eks. [4,6] eller [96,98] ! Tallet '-2' er i virkeligheden repræsenteret ved uendelig mange ordnede par - som i vores fortolkning svarer til at 2. tal minus 1. tal giver 2.

En typisk metode i matematik til at løse dette problem er ved at indføre en såkaldt 'ækvivalens-relation'. Vi siger f.eks. at [3,5] er ækvivalent med [96,98] og skriver: [3,5] **~** [96,98]. Det kræver dog at vi definerer hvad det vil sige at to ordnede par er indbyrdes ækvivalente, og definitionen skal baseres på allerede kendte begreber, nemlig addition af hele positive tal.

Det vi mener med [3,5] **~** [96,98] må være at 3 - 5 = 96 - 98, eller, bedre udtrykt, med at 3 + 98 = 96 + 5, altså ved addition af tal tilhørende N.

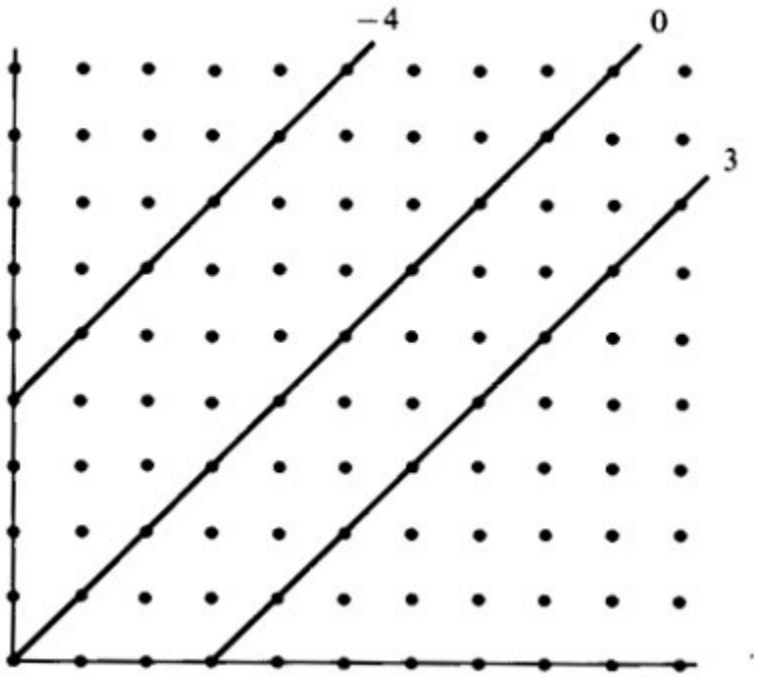
Generelt definerer vi ækvivalens-relationen således:

$$[m,n] \sim [p,q] \quad \Leftrightarrow \quad m + q = p + n$$

Ethvert helt tal defineres nu som samlingen af alle ækvivalente ordnede par.
En sådan samling kaldes en 'ækvivalens-klasse'. Et bestemt ordnet par, [m,n], i en ækvivalens-klasse er så 'repæsentant' for tallet.
Hvis m < n er det pågældende tal 'negativt'.
Hvis m > n er det pågældende tal 'positivt'.
Hvis m = n har vi repræsentanter for tallet '0'.
N, eller en mængde "helt svarende til" **N** (kaldet 'isomorf med **N**'), bliver på denne måde en ægte delmængde af **Z**.

Ud fra denne definition, sammen med aksiomer og defintioner bag **N**, kan alle de kendte (ønskede) regneregler og egenskaber for hele tal udledes og nye teoremer bevises.

Ækvivalens-klasserne for de hele tal kan illustreres således:



Tegningen er hentet hos Enderton 1977, kapitel 5

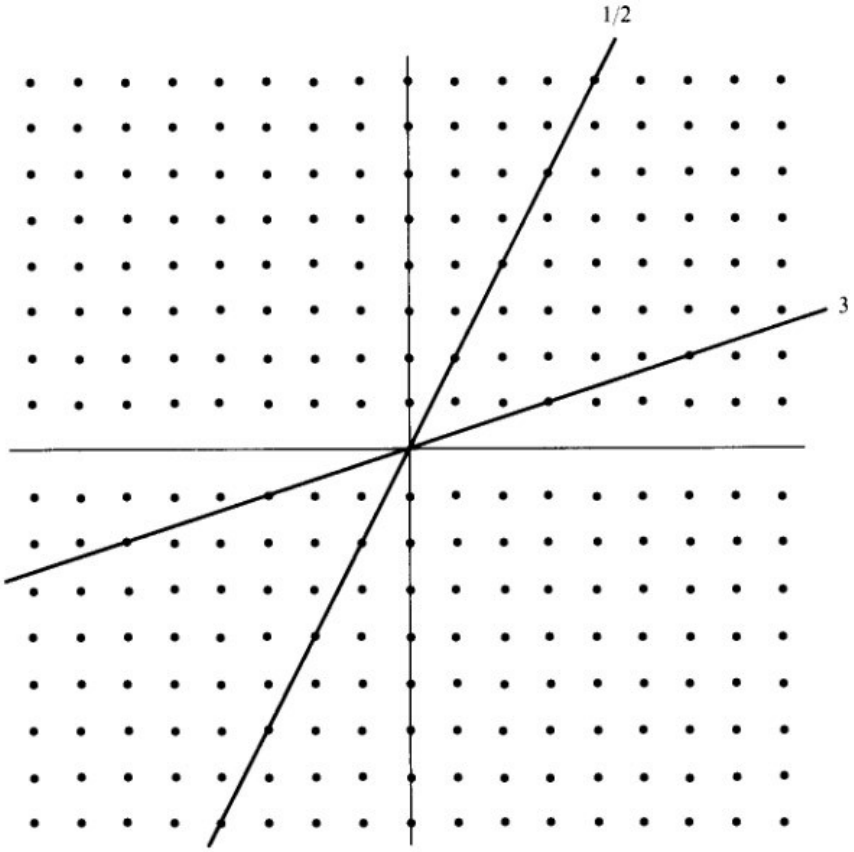
Det ordnede par [m,n] opfattes her som koordinater med m på 1.aksen og n på 2.aksen. F.eks. ligger de ækvivalente par [0,4], [1,5], [2,6], etc. på samme rette linje (repræsenterende '-4'). Addition af to tal kommer i diagrammet til at svare til vektor-addition (parallellogram-reglen). Se f.eks. på [1,5] + [5,2] = [6,7], (-4 + 3 = -1).

Fra de de hele tal Z til de rationelle tal Q.
Udvidelsen fra **Z** til **Q** kan foretages på en måde meget lig udvidelsen fra **N** til **Z**. Løsning af ligningen x * b = a hvor b ikke må være 0, b ≠ 0, har vi lært kan skrives som en brøk, a/b. Det fører til en ny type ordnede par, [a,b], og til ækvivalens-relationen:

$$[a,b] \sim [c,d] \quad \Leftrightarrow \quad a * d = c * b, \quad (b \neq 0 \text{ og } d \neq 0),$$

svarende til at de to brøker a/b og c/d repræsenterer samme rationelle tal.

Også her kan ækvivalens-klasserne grafisk bestå af punkter på rette linjer:



Tegningen er hentet fra Enderton 1977, kapitel 5

Addition af to rationelle tal repræsenteret ved [a,b] og [c,d] kan defineres således:

$$[a,b] + [c,d] = [ad + cb, bd] \quad \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd} \right)$$

som afspejler den gode regel om at to brøker adderes ved at sætte på fællesnævner. En sådan definition skal følges op med et bevis for, at resultatet er uafhængigt af hvilke repræsentanter for ækvivalens-klasserne man benytter.

Appendiks 9D. Zermelo-Fraenkel aksiomerne bag mængde-teorien.

ZF-aksiomerne kan virke både kringlede og uforståelige, især når de formuleres i en ren symbolsk formalistisk udgave. Samtidig fremstiller nogle af dem udsagn som tilsyneladende er så selvfølgelige, at man undrer sig over at det overhovedet er nødvendigt at formulere udsagnet som et aksiom. Aksiomerne fremstilles i dag i flere udgaver, oftest som 9 aksiomer. Her nævnes nogle af aksiomerne (med engelske navne på aksiomerne).

- 'Axiom of extension'. *To mængder er lig med hinanden hvis og kun hvis de indeholder de samme elementer.*
- 'Axiom of infinity'. *Der eksisterer mindst én 'efterfølger-mængde'.*
  (Se appendiks 9B, aksiomerne bag de naturlige tal).
- 'Axiom of power set'. *Til enhver given mængde **A** eksisterer en mængde, kaldet potensmængden til **A**, hvis elementer er samtlige delmængder af den givne mængde.* (Potensmængde blev præsenteret i kapitel 15).
- 'Axiom of specification'. *Til en enhver mængde **A** og til enhver egenskab E findes en mængde **B** hvis elementer præcis er de elementer x i **A** som har egenskaben E.* Mængden **B** kaldes en 'delmængde af **A**'.
  Begrebet 'egenskab' er ikke en løs formulering i systemet, men fastholdes gennem bestemte formler eller veldefinerede strenge af symboler. F.eks. kan **A** være de naturlige tal og E være "x er et primtal" hvor begrebet 'primtal' på forhånd er defineret.

Vi kan give en fornemmelse af hvilken drejning problemet i Russell's paradoks får ved hjælp af 'axiom of specification':

I ZF-systemet er som nævnt alle elementer selv mængder. Lad **A** være en vilkårlig mængde. x betegner et element i **A**, og x er altså selv en mængde.
Som egenskab E vælger vi nu: "x tilhører ikke sig selv".
A har en delmængde **B** som defineres således:
Præcis alle elementer x i delmængden **B** opfylder egenskaben E.
Vi antager nu at mængden **B** er element i **A**.
Dernæst spørger vi om **B** tilhører sig selv eller ikke.
Når **B** er element i **A** og ikke tilhører sig selv, så har **B** egenskaben E, men så er **B** element i **B**, dvs. **B** tilhører sig selv.
Og når **B** er element i **A** og tilhører sig selv, så har **B** ikke egenskaben E, men så er **B** ikke element i **B**, dvs. **B** tilhører ikke sig selv.
Vi har en modstrid, derfor må antagelsen at **B** er element i **A** forkastes.
Men **A** var en vilkårlig mængde. Så vi har vist at der for enhver vilkårlig mængde **A** gælder, at der findes "noget" (nemlig i alt fald som her **B**) som ikke tilhører **A**.

Vi får ikke her et paradoks, men at ZF-aksiomerne sikrer at der ikke findes mængder som indeholder "alt", f.eks. 'mængden af alle mængder'.

Det 9. aksiom, udvalgs-aksiomet, siger i en formulering således:
Givet en samling af mængder som alle er ikke-tomme. Så er det altid muligt at foretage at udvalg bestående af ét element fra hver mængde.

Hvis samlingen af mængder er endelig, er udvalgs-aksiomet overflødigt. For vi kan i et endeligt antal skridt udvælge ét element fra hver mængde.
Og udvalgs-aksiomet er også overflødigt hvis samlingen af mængder er uendelig, men af en sådan art, at man kan give en opskrift (algoritme) ved hjælp af hvilken, man kan udvælge et bestemt element fra hver mængde. Dette gælder f.eks. hvis samlingen af mængder er delmængder af de naturlige tal, **N**, idet udvalg kan fastlægges ved i hver delmængde at vælge det mindste tal.
Men i det generelle tilfælde er udvalgs-aksiomet nødvendigt, og samlingen af mængder (som i sig selv er en mængde) kan endda være uendelig og ikke-numerabel.

At udvalgs-aksiomet kun tilsyneladende er selv-indlysende kan ses af, at aksiomet er ensbetydende med et teorem, 'velordnings-teoremet' ('well-ordering theorem') som absolut ikke virker indlysende.

En ordning af en mængde er et system som gør det muligt at tale om, at et element kommer før et andet element (er 'mindre end' et andet element).
At velordne en mængde vil sige at definere en ordning, sådan at enhver ikke-tom delmængde har et første element (mindste element). Dette kaldes velordnings-princippet.

F.eks. opfylder de naturlige tal **N** med den sædvanlige ordning (< eller ≦) velordnings-princippet, idet enhver delmængde af **N** nødvendigvis må indeholde et mindste tal.
De hele tal **Z** opfylder ikke velordnings-princippet med den sædvanlige ordning, for vi kan vælge delmængder med vilkårligt små (negative) tal, f.eks. mængden af alle hele tal mindre end 13. Men for de hele tal kan vi definere en anden type ordning, f.eks. den vi benyttede i kapitel 6 til at vise at de hele tal er nummerable:
(0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...). Denne ordning af **Z** opfylder velordnings-princippet.

Velordnings-teoremet siger:
For en vilkårlig mængde findes en ordning så mængden kan velordnes.

Man kan ud fra de 8 ZF-aksiomer bevise at velordnings-teoremet og udvalgs-aksiomet er ækvivalente. Man kan derfor frit vælge om man vil have udvalgs-aksiomet som 9. aksiom og velordnings-teoremet som teorem, eller omvendt.

At velordnings-teoremet medfører udvalgs-aksiomet er forståeligt allerede på et intuitivt plan. For hvis enhver mængde kan velordnes, kan denne ordning bruges til at udvælge et mindste element i enhver delmængde af mængden. Det omvendte, at udvalgs-aksiomet medfører velordnings-teoremet er mindre indlysende, men kan bevises.

Men hvordan kan man velordne de reelle tal **R**? Det kan i alt fald ikke lade sig gøre med den sædvanlige ordning (< eller ≦), og heller ikke den alternative ordning brugt på **Z** kan bruges. For vi kan f.eks. ikke finde et mindste element i den delmængde af de reelle tal som består af alle tal mellem 0 og 1, 0 og 1 ikke medregnet (det åbne interval]0,1[ ). Men velordnings-teoremet siger altså at en sådan ordning af de reelle tal findes - man har blot ikke til dato fundet den! Situationen er ækvivalent med, at man ikke har kunnet påvise en måde generelt at foretage udvalg af en uendelig samling af delmængder af de reelle tal.

Appendiks 10. Paradokser.

Henvist fra kapitel 18 og 20.

Nogle eksempler på semantiske paradokser samt en anden version af Cantor's paradoks (pas på!, man får krøller i hjernen af dette!):

Grelling's paradoks.

Opdel alle adjektiver på dansk i to kategorier, et adjektiv er:

1. autologisk, hvis den egenskab adjektivet beskriver, kan bruges på adjektivet selv (f.eks. 'flerstavelses-ord', 'mærkværdighedsagtig', 'fremmedord').
2. heterologisk, hvis den egenskab adjektivet beskriver, ikke kan bruges på adjektivet selv (f.eks. 'tostavelses ord', 'rødt', 'tysk').

Hvilken kategori hører adjektivet 'heterologisk' til?

Richard's paradoks.

Alle definitioner om egenskaber ved hele positive tal kan opstilles i en ordnet liste, f.eks. i alfabetisk orden, og hver egenskab i listen kan nummereres 1, 2, 3 ... .

Tallene kan nu deles op i to kategorier:

1. Tal som selv besidder den egenskab som de er nummer for (f.eks. 17 hvis egenskaben "tallet er et primtal" har nummer 17 i listen).
2. Tal som ikke selv besidder den egenskab som de er nummer for (f.eks. 19 hvis egenskaben "tallet er et kvadrattal" har nummer 19)

Nu defineres følgende egenskab: Et helt positivt tal x er 'Richardian' hvis x ikke har den egenskab som tallet x er nummer for i listen.

F.eks. er i eksemplerne ovenfor 19 Richardian og 17 er ikke Richardian.

Egenskaben at et tal er Richardian må selv stå i listen over alle definitioner om egenskaber ved hele positive tal, og denne egenskab må have et bestemt nummer.

Lad os kalde dette nummer n. Er n Richardian?

Sammenlign med beviset for Cantor's teorem anvendt på de naturlige tal.

Protagoras' paradoks.

Sofisten Protagoras lavede følgende aftale med en af sine studenter: Denne student skulle kun betale for sin uddannelse hvis han vandt sin første retssag. Studenten blev kandidat og ventede på at få klienter, men ingen dukkede op. Protagoras blev utålmodig og sagsøgte sin student for at få ham til at betale for uddannelsen.

Kom studenten til at betale for sin uddannelse?

Cantor's paradoks i en anden version.
Cantor's paradoks findes også i en formulering som mere direkte handler om kardinaltallene. Denne formulering er noget mere kompliceret, men fører samtidig til en interessant konklusion.
Vi antager at der findes en mængde, **S**, hvis elementer udgør mængder repræsenterende alle de uendelig mange mulige kardinaltal. Vi ser nu på mængden **T** som er foreningsmængden af alle elementerne i **S**. Elementerne i **S** er jo selv mængder, og **T** består så af alle disse mængders elementer. Så vil ethvert element i **S** være en delmængde af **T**, idet elementet i **S** er en mængde som indeholder nogle af de elementer som **T** består af. Men så må ethvert element i **S** have et kardinaltal som er mindre end eller lig med kardinaltallet for **T** og dermed ifølge Cantor's teorem være strengt mindre end (<) kardinaltallet for **T**'s potensmængde **P(T)**.

Konklusionen er at alle de kardinaltal som er repræsenteret ved elementerne i **S** er opadtil begrænset. Men så kan **S** ikke indeholde mængder repræsenterende alle mulige kardinaltal, for de er ifølge Cantor's teorem netop ikke opadtil begrænset, idet enhver mængde har en potensmængde med et større kardinaltal end den oprindelige mængde.
Derfor må antagelsen forkastes, der findes ingen mængde hvis elementer udgør mængder repræsenterende alle mulige kardinaltal. Og dermed kan man slet ikke tale om alle kardinaltal som en mængde!

Appendiks 11. Litteratur.

Denne liste er forsøgt opbygget så den lettest tilgængelige litteratur står først.

Desuden henvises til Wikipedia (engelsk), https://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page .
Dér findes talrige gode oversigtsartikler om stort set alle matematiske emner.
Sværhedsgraden er varierende og som regel fra let til stigende igennem den enkelte artikel.
Skulle man ved læsning af en artikel i Wikipedia have mistanke om fejl, er det en god idé først at klikke på 'View history' for at få et overblik hvilke ændringer der i tidens løb er foretaget i artiklen.
Jeg vil i øvrigt opfordre til engang imellem at donere et beløb til Wikipedia - som indtil videre kører uden reklame-indtægter.

Suber, Peter 1998: A Crash Course in the Mathematics Of Infinite Sets,
Philosophy Department, Earlham College,
https://legacy.earlham.edu/~peters/writing/infapp.htm
Disse noter var min oprindelige inspirationskilde til selv at skrive noget tilsvarende, men gerne mere detaljeret udbygget i argumentationen.

Halmos, Paul R. 1960 og 1974: Naive Set Theory. Springer-Verlag.
Min første hovedkilde med hensyn til en mere systematisk fremstilling af aksiomatisk mængde-teori. Vægtningen mellem tekst og symbolik går i retning af mere tekst.
Termen 'naive' er jo lidt sjov, men bruges faktisk i sammenhæng med matematiske fremstillinger. Begrebet 'naive' i denne forbindelse bruges i dag i flere betydninger. Halmos bog er 'naive' i den forstand at der er meget tekst i forhold til formel symbolik, men fremstillingen er alligevel meget præcist bygget op aksiomatisk og med omhyggelige beviser.
I den oprindelige betydning ser det ud til at 'naive' står for fremstillinger af aksiomatisk mængde-teori hvor begrebet mængde ikke er så vel-defineret at paradokser kan undgås.
https://en.wikipedia.org/wiki/Naive_set_theory

Enderton, Herbert B. 1977: Elements of Set Theory. Academic Press.
Min anden hovedkilde. Lidt i samme stil som Halmos, men med mere symbolik i forhold til tekst. Mere udførlig med hensyn til kardinaltal og deres sammenhæng med ordinaltal.

Salomonsen, Hans Anton: Uendelige tal. Mængdelæren og dens paradokser. God indføring i emnet i en semi-populær fremstilling.
Indlægget findes i: Salomonsen, Hans Anton (red) 2013: Matematiske mysterier. Historien, forklaringerne og løsningerne. Århus Universitetsforlag.
Her er der mange andre gode indføringer i matematiske emner, blandt andet om primtal.

Hofstadter, Douglas R. 1979 og 1999: Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid.
Basic Books. Et meget omfattende og ret ekcentrisk eller 'flippet' værk med en populariserende, men meget dybtgående, fremstilling bl.a. af den matematisk aksiomatik, og herunder om matematikeren Gödels ufuldstændigheds-teorem.

Hardy, G.H.; Wright, E.M. 1938, 1968, 2008: An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford at the Caredon Press. En af de blandt matematikere anerkendte grundbøger om dette emne.

Mendelson, Elliott 1964, 1997: Introduction to Mathematical Logic. Chapman & Hall.
Dette er den 'rene' matematiske fremstilling af aksiomatisk mænge-teori, meget formelt og symbolsk opbygget. Jeg brugte den lidt i min studietid, men har selv haft svært ved at 'dechifrere' den. Den har imidlertid været nyttig at vende tilbage til i forbindelse med emner jeg bedre har forstået fra de mere lette ('naive') kilder.

Davis, Philip J.; Hersh, Reuben, 1981: The Mathematical Experience. Houghton Mifflin Company Boston (Birkhäuser Boston).
Et grundigt værk om matematikkens historie og de erkendelsesteoretiske og filosofiske aspekter, herunder også om de divergerende matematiske 'skoler'.

Hellman, Hal, 2006: Great Feuds In Mathematics - Ten of the Liveliest Disputes Ever. John Wiley & Sons, Inc.
En meget underholdende bog som dokumenterer, at også matematikere kan strides, ikke kun om hvem der kom først med en ny teori, men også f.eks. om hvad der kan anerkendes som "rigtige" matematiske argumenter.

Kline, Morris, 1972: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, bind 1-3. Oxford University Press.
Et omfattende værk om matematikkens udvikling skrevet af en matematiker med interesse i historie, filosofi og pædagogik af relevans for matematik. Jeg har selv brugt den som opslagsværk.

Meyer, Torsten: Matematikkens spilleregler og ufuldstændighed.
https://torstenmeyer.dk/matforhvem0809/index.htm
Et web-baseret skrift som blev brugt til et kursus for gymnasieelever og voksne (elevernes forældre, kolleger og folk fra lokal-området til Nørre Gynasium) om matematik for ikke-matematikere.
Det omhandler 'pædagogiske' eksempler på aksiomatiske systemer samt et forsøg på at fremstille Gödel's beviser på en lettere tilgængelig måde. Referencer til dette findes nederst på: https://torstenmeyer.dk/matforhvem0809/mfhsh08a0104.htm