Newtons gravitationsproblem

Part I: Enkle løsninger i nutidig notation

Flemming Jørgensen, Næstved Gymnasium og HF, *fjbj@stofanet.dk*

Dette er den første af to artikler – 2. artikel kommer i septembernummeret – som tager tråden op efter Ole Witt-Hansens artikel om Newtons gravitationsproblem, altså dette, at man kan beregne gravitationskraften fra et kugleformet legeme som om hele legemets masse var placeret i dets centrum. I denne artikel præsenteres "moderne" løsninger – i næste kigger forfatteren på Newtons egen løsning.

Betragt to masser μ og M, hvis tæthed er rotationssymmetrisk fordelt inden for rumligt adskilte kugler. Disse masser tiltrækker hinanden med kraften,

$$F = G \cdot \frac{\mu \cdot M}{R^2} \qquad (1)$$

hvor G er gravitationskonstanten, og R er afstanden mellem kuglernes centre. Lad os formulere Newtons gravitationsproblem således: Vis at formlen (1) gælder generelt, hvis den gælder for to punktpartikler. Som vi skal se i part II, gik Newton det ikke helt sådan frem i *Principia* [1, s. 193], men det er ikke hensigtsmæssigt her at holde sig slavisk til det historisk helt korrekte.

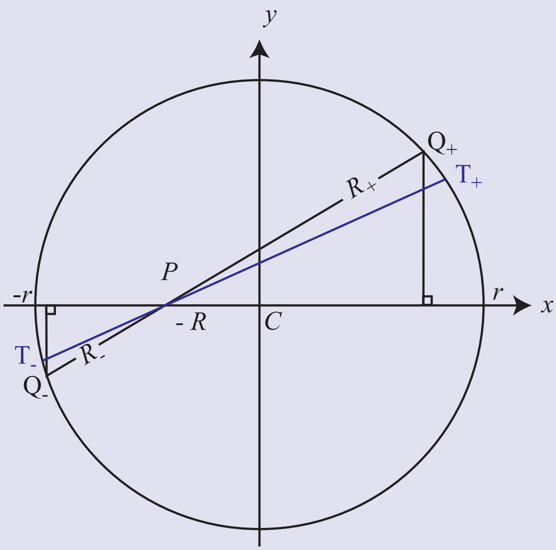
Newton lægger ud med at vise, at (1) gælder hvis M er jævnt fordelt over en tynd kugleskal med radius r – dog sådan, at hvis μ befinder sig indenfor fladen ($r < R$), så er kraften *nul*. Lad os kalde dette for Newtons *centrale* resultat. Med dette bevist, kan man jo nemlig opdele en massiv kugle i koncentriske tynde skaller og derved umiddelbart se, at (1) stadig gælder, når M er massiv. På samme måde ses af det centrale resultat, at skulle μ befinde sig *inden for* overfladen af en massiv kugle, så gælder formlen stadig, blot M i denne reduceres til den masse, der ligger inden for μ's afstand R fra centrum.

Det sidste skridt frem til tilfældet med to massive kugler klares også let, nemlig [1, s. 197] ved loven om aktion og reaktion: Når vi har eftervist (1) for, hvorledes en massiv kugle M trækker i en punktmasse μ, så har vi *også* vist, hvorledes punktmassen μ trækker tilbage i kuglemassen M. I tilfælde af to kuglemasser, kan vi udregne kraften *fra* μ ved at tænke os dennes masse samlet i sit centrum. Og vi ved, at (1) gælder for den kraft, hvormed μ som punktmasse trækker i M som kuglemasse.

I sidste nummer af LMFK-bladet [nr. 2, marts 2008 s. 32-34] gjorde Ole Witt-Hansen rede for, hvorledes man ved at integrere "lige på og hårdt" i polære koordinater kan eftervise (1) i det tilfælde hvor μ som en punktpartikel befinder sig uden for overfladen af en massiv kugle M med konstant indre densitet. Ovennævnte *centrale problem* er ikke nævnt direkte, men er i alt væsentligt løst implicit undervejs. OWH begrunder sin artikel med, at han ikke mener at have set Newtons gravitationsproblem løst i gængse lærebøger. Løsningen *må* jo givetvis være at finde flere steder, men heller ikke jeg har set den, og OWH's artikel blev for mig et kraftigt incitament til at finde ud af, hvorledes Newton *selv* havde gjort. Det vender jeg tilbage til i part II.

Herunder følger 3 løsninger på det centrale problem, som jeg fik ideerne til undervejs. Den læser, der blot ønsker at se en matematisk løsning på gymnasialt (A-)niveau, kan gå direkte til den 3. og sidste. De to første bygger på indledende fysiske overvejelser, der fører til en simplere integration. *I 2. metode er integrationen i praksis helt elimineret*. Metoden her er i det væsentlige en gengivelse af Newtons egen i nutidig terminologi. Som vi skal se i part II udnytter den dog et forhold, som jeg mener, kunne have gjort hans fremstilling væsentligt kortere og klarere, hvis han havde opdaget det.

Man plejer – som også OWH skriver – at sige, at Newton skulle have udviklet sin differential- og integralregning, inden han kunne løse problemet. Jeg har ledt i Principia, men intet fundet der blot minder om integration ved stamfunktion. Differentialkvotient derimod forekommer implicit som forholdet mellem små geometriske størrel-



***Figur 1**: Figuren viser en masse M, der er jævnt fordelt på overfladen af en tynd kugleskal med radius r. I et punkt P på en x-akse med nulpunkt i centrum C er anbragt en punktmasse μ. Med*

$$k = \frac{R_+}{R_-}$$

ser man af ensvinklede trekanter, at det infinitesimale stykke Q_+T_+ er k gange så langt som stykket Q_-T_-, og at dets afstand fra x-aksen også er k gange så stor. I en rotation om x-aksen vil buestykkerne altså beskrive arealer dA_+ og dA_-, der opfylder $dA_+ = k^2 \cdot dA_-$. Kraften dF_+ fra dA_+ vil derfor ophæve kraften DF_- fra dA_-.

ser. Læg i den forbindelse mærke til de sidste 3 formler i teksten til fig. 2. De udtrykker alle forholdet mellem små længdeforøgelser ved forholdet mellem sider i "store" trekanter i figuren. I dag udledes sådanne resultater lettest ved differentiation – i Principia har Newton konsekvent gjort det ved geometri og intuition for betydningen af infinitesimalt lille.

Nu til beviserne.

Punktpartiklen inden for kugleskallen

I dette tilfælde løses problemet ved et simpelt fysisk ræsonnement som vist i teksten til figur 1.

Punktpartiklen uden for kugleskallen

Fig. 2 med tekst indfører forskellige størrelser, der bruges ved løsningen af dette lidt mere komplicerede problem.

Simple iagttagelser forud for beviserne

Under en rotation om x-aksen vil buestykket Q_+T_+ beskrive en ring på kuglen. Da denne har arealet $2\pi \cdot y_+ \cdot Q_+T_+$, vil den besidde massen

$$\begin{aligned} dm_+ &= \frac{M}{4\pi r^2} \cdot 2\pi \cdot y_+ \cdot Q_+T_+ \\ &= \frac{M}{2r^2} \cdot y_+ \cdot \frac{rR_+}{Ry_+} \cdot dR_+ \\ &= \frac{M}{2r} \cdot \frac{R_+}{R} \cdot dR_+ \end{aligned} \qquad (2)$$

Gravitationskraften på μ fra denne vil pege mod centrum og have størrelsen

$$\begin{aligned} dF_+ &= \cos(\theta) \cdot G \cdot \frac{\mu \cdot dm_+}{R_+^2} \\ &= G \cdot \frac{\mu\, M}{R^2} \cdot \frac{1}{2r} \cdot \frac{RR_+ \cdot \cos(\theta)}{R_+^2}\, dR_+ \end{aligned} \qquad (3)$$

hvor faktoren $\cos(\theta)$ tilgodeser, at den kraft, der udgår fra et lille delelement af ringen, kun virker med sin komposant langs x-aksen. Fra den ring, der beskrives af buestykket Q_-T_-, udgår en tilsvarende kraft dF_-, og et ræsonnement som i teksten til fig. 1 viser, at denne er præcis lige så stor som dF_+, blot peger den nu samme vej. Den samlede kraft fra de to ringe er altså

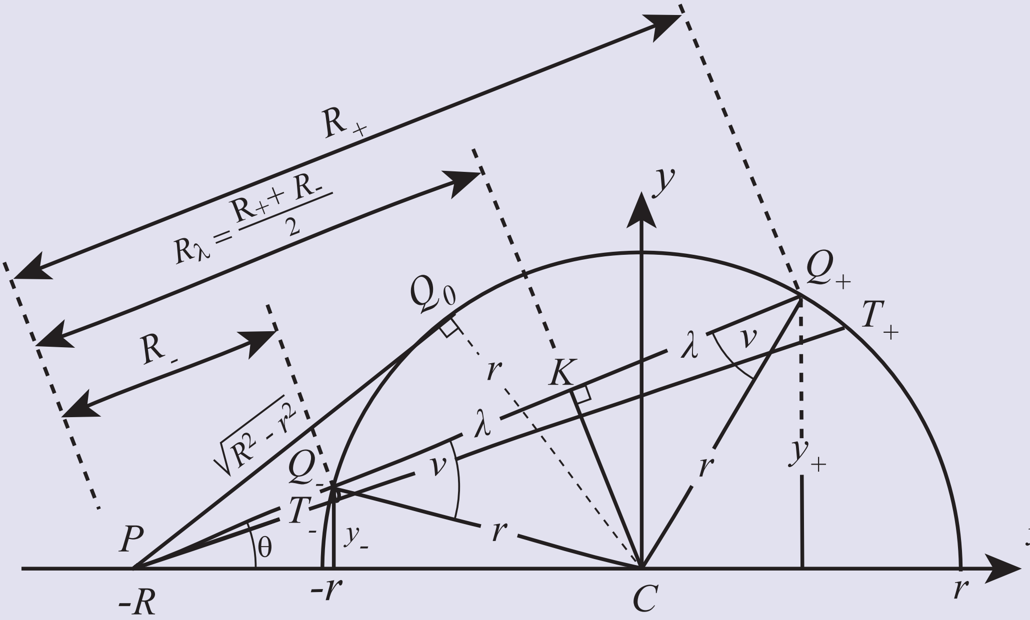
$$dF = dF_+ + dF_- = 2\, dF_+ \text{ da } dF_- = dF_+ \qquad (4)$$

Kraften F_- fra hele den del af kuglens overflade, hvis afstand fra P er mindre end afstanden $PQ_0 = \sqrt{R^2 - r^2}$ til tangent-punktet Q_0 er altså identisk med kraften F_+ fra hele delen med større afstand. Vi skriver

$$F = F_+ + F_- = 2\, F_+ \text{ da } F_- = F_+. \qquad (5)$$

Det gælder følgelig om at vise, at

$$F_+ = \frac{1}{2}\, G \frac{\mu \cdot M}{R^2} \qquad (6)$$



Figur 2: *Samme situation som i fig. 1, blot ligger punktmassen μ i P nu uden for kuglefladen, og et par ekstra detaljer er indtegnet. Det lille buestykke Q_+T_+ opstår, når R_+ øges med dR_+ og – betragtet som sammenfaldende med cirklens tangent – har det længden*

$$Q_+T_+ = \frac{dR_+}{\sin(v)} = \frac{rR_+}{Ry_+}\, dR_+$$

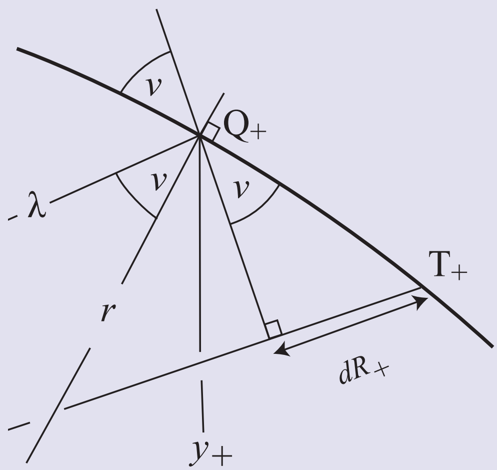
Vinklen forekommer nemlig også i trekant PCQ_+, hvor den opfylder sinusrelationen

$$\frac{R}{\sin(v)} = \frac{r}{\sin(\theta)} \text{ med } \sin(\theta) = \frac{y_+}{R_+}.$$

Ligger P fast, er Q_- og Q_+ entydigt bestemt ved viste længde $\lambda \in [0, r]$ af den halve korde Q_-Q_+. Når $\lambda = 0$, ligger de begge i Q_0, når $\lambda = r$, er de rykket ned på x-aksen. Det ses, at

$$R_\pm = R_\lambda \pm \lambda \text{ og } \cos(\theta) = \frac{R_\lambda}{R},$$

hvor $R_\lambda = \sqrt{R^2 - r^2 + \lambda^2}$



er bestemt ved elementær brug af Pythagoras's sætning. Differentiation giver

$$\frac{dR_\lambda}{d\lambda} = \frac{\lambda}{R_\lambda},\quad \frac{dR_+}{d\lambda} = \frac{\lambda}{R_\lambda} + 1 = \frac{R_+}{R_\lambda} \text{ og } \frac{dR_-}{d\lambda} = -\frac{R_-}{R_\lambda}$$

1. bevis

Cosinusrelationen

$$2RR_+ \cdot \cos(\theta) = R^2 + R_+^2 - r^2$$

anvendt i (3) giver

$$dF_+ = G\frac{\mu M}{R^2} \cdot \left(\frac{R^2 - r^2}{R_x^2} + 1\right) \cdot \frac{dR_+}{4r} \qquad (7)$$

Den samlede kraft findes heraf ved integration over R_+ fra $\sqrt{R^2 - r^2}$ til $R + r$. Idet stamfunktionen umiddelbart aflæses, fås

$$F_+ = G \cdot \frac{\mu M}{R^2} \cdot \frac{1}{4r}\left[\frac{R_+^2 - (R^2 - r^2)}{R_+}\right]_{\sqrt{R^2 - r^2}}^{R+r} \qquad (8)$$

der let reduceres til det ønskede (stamfunktionen er nul i nedre grænse).

2. bevis

I (3) indsætter vi, at $\cos(\theta) = \frac{R_\lambda}{R}$ samt

$$dR_+ = \frac{dR_+}{d\lambda} \cdot d\lambda = \frac{R_+}{R_\lambda} \cdot d\lambda \qquad (9)$$

(se teksten til fig. 2) og får

$$dF_+ = G\frac{\mu M}{R^2} \cdot \frac{1}{2r} \cdot d\lambda \qquad (10)$$

Lige lange intervaller i λ giver altså samme bidrag til F_+ – vi får hele F_+ ved at erstatte $d\lambda$ med r. Dette giver straks det ønskede resultat – helt uden en egentlig integration.

3. bevis

Betragtningerne i teksten til fig. 2 koges ned til følgende.

Idet buestykket Q_+T_+ strækker sig fra x til $x + dx$ på aksen, ser man ved brug af Pythagoras' sætning, at det dets afstand fra P er givet ved $R_x = \sqrt{R^2 + r^2 + 2\,Rx}$, der i modsætning til R_+ kan strække sig helt fra $R - r$ til $R + r$.

Ved en kendt sætning om areal af kuglebælte ser man, at hvis buestykket Q_+T_+ roteres om x-aksen, så beskriver det en ring, et kuglebælte, der har arealet $dA = 2\pi\, r \cdot dx$, og derfor besidder massen

$$dm = \frac{M}{4\pi\, r^2} \cdot 2\pi\, r\, dx = \frac{M}{2r}\, dx \qquad (11)$$

Gravitationskraften herfra på μ er givet ved

$$dF = \cos(\theta) \cdot G \cdot \frac{\mu \cdot dm}{R_x^2}$$
$$= G \cdot \frac{\mu \cdot M}{R_x^2} \cdot \frac{1}{2r} \cdot \frac{RR_x \cdot \cos(\theta)}{R_x^3} \cdot R \cdot dR_x \qquad (12)$$

hvor betydningen af faktoren $\cos(\theta)$ er den samme som i (3). Med $R_x \cdot \cos(\theta) = R + x$ kan den samlede kraft altså skrives som

$$F = \tfrac{1}{2}\, G \cdot \frac{\mu \cdot M}{R^2} \cdot \int_{-r}^{r} g(x) \cdot dx;$$

$$g(x) = \frac{R^2}{r} \cdot \frac{R + x}{(R^2 + r^2 + 2Rx)^{3/2}} \qquad (13)$$

Indtastes integralet på TI89 fås

$$\int_{-r}^{r} f(x)dx = \frac{r + R}{\sqrt{(r + R)^2}} - \frac{r - R}{\sqrt{(r - R)^2}}$$
$$= \begin{cases} 2, \text{ hvis } 0 < r < R \\ 0, \text{ hvis } 0 < R < r \end{cases} \qquad (14)$$

Den sidste reduktion må man selv udføre – husk at $\sqrt{(a - b)^2}$ er lig $b - a$, hvis $b > a$. Heraf følger det ønskede umiddelbart.

Vil man have helt styr på udregningen af integralet, kan man lade TI89 udregne

$$G(x) = \int g(x)dx = \frac{x \cdot R + r^2}{r\,\sqrt{r^2 + R^2 + 2xR}}, \qquad (15)$$

ved differentiation i hånden kontrollere at,

$$G'(x) = g(x),$$

og endelig finde det bestemte integral i (6) som $G(r) - G(-r)$. Det er helt enkelt.

Referencer

[1] Isaac Newton: *Principia*. Mottes translation revised by Cajori
Vol I, *The motion of Bodies* til p. 396.
Vol II, The system of the world, pp 397-680.
University of California Press 1962. ◊

2. del af Flemming Jørgensens artikel bringes i septembernummeret af LMFK-bladet.